

Die Finite-Elemente-Methode am Beispiel des Strahlapparates

Prof. Dr. Hans-Herbert Vogel
Institut für Fahrzeugbau Wolfsburg
Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel

Die Finite-Elemente-Methode wurde zur Modellierung unterkritischer Strömungen durch Strahlapparate angewendet. Modellfluid war trockene Luft konstanter Dichte im Umgebungszustand. Variiert wurde der Mischrohrquerschnitt sowie das Verhältnis von Saugstrahl- und Treibstrahlmassenstrom im Bereich von 0 bis 1. Zur Inter- und Extrapolation der Rechenergebnisse nach der Finite-Elemente-Methode wurde ein einfaches eindimensionales Strömungsmodell mit einheitenlosen Parametern entwickelt. Zur graphischen Darstellung der Ergebnisse werden neue Diagramme vorgeschlagen, mit denen man das Betriebsverhalten (Charakteristik) des Strahlapparates in Form des Druckdifferenzverhältnisses ω (relative Saugstrahlverdichtung) und des Wirkungsgrades η ablesen kann. Zur Auslegung des Strahlapparates benötigt man zusätzlich die Kenngröße ζ . Die maximale relative Abweichung zwischen dem eindimensionalen Modell und der Finite-Elemente-Methode beträgt -13 %.

1 Einleitung

Strahlapparate werden in vielen Bereichen der Vakuum-, Verfahrens- und Energietechnik eingesetzt. Hinsichtlich der Aggregatzustände der Fluide unterscheidet man Gas-Gas-, Flüssigkeits-Gas-, Flüssigkeits-Flüssigkeits- und Gas-Flüssigkeits-Strahlapparate. Die Aufgabe des Strahlapparates (Bild 1) besteht darin, mit dem Treibstrahlmassenstrom \dot{m}_1 beim Treibdruck p_e den Saugstrahlmassenstrom \dot{m}_2 beim Saugdruck p_0 anzusaugen, zu mischen und auf den Gegendruck p_a zu verdichten. Für den Mischungsprozess im Mischrohr ist der Impulstransport einer turbulenten Strömung vorauszusetzen, die mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode [1] durch das k - ε -Modell beschrieben werden kann. Dieses Turbulenzmodell ist eine Erweiterung der Navier-Stokes-Gleichung um einen Fluktuationsterm.

Diese Arbeit beschränkt sich zur Aufdeckung einfacher Gesetzmäßigkeiten auf Fluide konstanter und gleicher Dichte ρ , wie sie in Flüssigkeits-Flüssigkeits- und in erster Näherung in Gas-Gas-Strahlapparaten bei Unterschallgeschwindigkeiten vorliegen. Exemplarisch wurde als Fluid trockene Luft mit der Dichte $\rho = 1,18 \text{ kg/m}^3$ bei Umgebungsbedingung gewählt. Die Ergebnisse der Finite-Elemente-Methode werden auf ein einfaches eindimensionales Strömungsmodells übertragen, das sich mit Hilfe neu eingeführter Diagramme zur Inter- und Extrapolation der Ergebnisse hervorragend eignet.

2 Definitionen und eindimensionales Strömungsmodell

Grundsätzlich wird angenommen, dass die Flächen der beiden Eintrittsquerschnitte (Düsen) und des Austrittsquerschnitts (Diffusor) so groß gewählt sind (Bild 1), dass die kinetischen Energien an diesen Stellen vernachlässigt werden können. Alle Zustandsgrößen werden als geeignete Mittelwerte eines Querschnitts vorausgesetzt.

2.1 Treibmittelverbrauch

Zur Charakterisierung des Treibmittelverbrauches wird der relative Treibstrahlmassenstrom [2]

$$\xi := \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} = \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}} \quad (1)$$

und das Massenstromverhältnis [3]

$$\mu := \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_2} \quad (2)$$

eingeführt, das den Treibstrom \dot{m}_1 mit dem Saugstrom \dot{m}_2 vergleicht. Mit

$$1 - \xi = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}} \quad (3)$$

ist der Zusammenhang zwischen beiden Maßen

$$\mu := \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}} \frac{\dot{m}}{\dot{m}_2} = \frac{\xi}{1 - \xi} . \quad (4)$$

2.2 Treibdüse

In der Treibdüse wird der Treibstrahl \dot{m}_1 vom Treibdruck p_e auf den Druck p_1 expandiert und auf die Geschwindigkeit w_1 beschleunigt. Für eine angenommene reversible und adiabate Strömung konstanter Dichte ρ ist die isentrope Enthalpiedifferenz des Treibstrahls

$$\Delta h_{s1} = \frac{p_1 - p_e}{\rho} . \quad (5)$$

Mit der Definition des isentropen Düsenwirkungsgrads der Treibdüse [4]

$$\eta_{D1} := \frac{w_1^2/2}{-\Delta h_{s1}} = \frac{\rho}{2} \frac{w_1^2}{p_e - p_1} \quad (6)$$

ist der Druckabfall in der Treibdüse mit Dissipation

$$p_e - p_1 = \frac{\rho}{2} \frac{w_1^2}{\eta_{D1}} \quad (7)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung einer allgemeinen stationären Strömung

$$\dot{m} = \rho w A \quad (8)$$

folgt die Treibstrahlgeschwindigkeit

$$w_1 = \frac{A_1}{\dot{m}_1 \rho} \quad (9)$$

wenn A_1 die effektive Treibdüsenaustrittsfläche bedeutet, die wegen der Strahleinschnürung kleiner als die geometrische Fläche $A_{1\text{geo}}$ ist.

2.3 Saugdüse

Durch den Unterdruck wird der Saugstrahl \dot{m}_2 in der Saugdüse, auch Fangdüse genannt, vom Saugdruck p_0 auf den Druck p_1 expandiert und auf die Geschwindigkeit w_2 beschleunigt. Mit der isentropen Enthalpiedifferenz des Saugstrahls

$$\Delta h_{s2} = \frac{p_1 - p_0}{\rho} \quad (10)$$

und dem isentropen Düsenwirkungsgrad der Saugdüse

$$\eta_{D2} := \frac{w_2^2/2}{-\Delta h_{s2}} = \frac{\rho}{2} \frac{w_2^2}{p_0 - p_1} \quad (11)$$

ist der Druckabfall in der Saugdüse

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho}{2} \frac{w_2^2}{\eta_{D2}} \quad (12)$$

wobei aus der Kontinuitätsgleichung die Saugstrahlgeschwindigkeit

$$w_2 = \frac{A_2}{\dot{m}_2 \rho} \quad (13)$$

folgt. A_2 ist die effektive Querschnittsfläche des Saugdüsenaustritts, die wegen der Strahlerweiterung größer als die geometrische Austrittsfläche $A_{2\text{ geo}}$ ist. Bei bestimmungsgemäßen Betrieb ist der Druckabfall in der Saugdüse $p_0 - p_1$ immer kleiner als der Druckabfall $p_e - p_1$ in der Treibdüse, d. h. bezüglich der Geschwindigkeiten gilt bei gleichen Düsenwirkungsgraden: $w_2 < w_1$.

2.4 Mischrohr

Das Mischrohr hat den konstanten Querschnitt

$$A_m = A_{1\text{ geo}} + A_{2\text{ geo}} \quad , \quad (14)$$

wenn $A_{1\text{ geo}}$ und $A_{2\text{ geo}}$ die geometrischen Querschnitte der Austrittsflächen von Treib- und Saugdüse bezeichnen. Die Normierung dieser Gleichung mit dem Mischrohrquerschnitt A_m liefert die relative Treibdüsenaustrittsfläche

$$\alpha := \frac{A_{1\text{ geo}}}{A_m} \quad (15)$$

und die relative Saugdüsenaustrittsfläche

$$1 - \alpha = \frac{A_{2\text{ geo}}}{A_m} \quad . \quad (16)$$

Die tatsächlichen Durchströmquerschnitte aufgrund der Treibstrahleinschnürung und der Saugstrahlerweiterung A_1 und A_2 verteilen sich ebenso auf den Mischrohrquerschnitt

$$A_m = A_1 + A_2 \quad . \quad (17)$$

Mit der Einschnürung

$$\sigma := \frac{A_1}{A_{1\text{ geo}}} \quad (18)$$

folgt aus Gl. (17)

$$1 = \frac{A_1}{A_{1\text{ geo}}} \frac{A_{1\text{ geo}}}{A_m} + \frac{A_2}{A_{2\text{ geo}}} \frac{A_{2\text{ geo}}}{A_m} = \sigma \alpha + (1 - \sigma \alpha) \quad , \quad (19)$$

denn die Erweiterung des Saugstrahls ist

$$\frac{A_2}{A_{2\text{ geo}}} = \frac{1 - \sigma \alpha}{1 - \alpha} \quad . \quad (20)$$

Die effektiven relativen Düsenaustrittsflächen sind also

$$\frac{A_1}{A_m} = \sigma \alpha \quad (21)$$

und

$$\frac{A_2}{A_m} = 1 - \sigma \alpha . \quad (22)$$

Am Ende des Mischrohrs sei die gemeinsame Mischgeschwindigkeit w_m erreicht. Für den Reibungsdruckverlust längs der Mischrohrstrecke z_m wird der Ansatz nach Blasius [5]

$$\Delta p_R = \lambda \frac{\rho}{2} w_m^2 \frac{z_m}{d_m} \quad (23)$$

mit

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (24)$$

und d_m als Mischrohrdurchmesser gewählt. Re ist die Reynoldszahl.

Die Impulsbilanz für das Mischrohr

$$\dot{m} w_m + p_m A_m + \Delta p_R A_m = \dot{m}_1 w_1 + \dot{m}_2 w_2 + p_1 A_m , \quad (25)$$

die mit Gl. (23) und der mehrfachen Anwendung der Gl. (8) auch in

$$w_m^2 A_m + \frac{p_m A_m}{\rho} + \lambda \frac{w_m^2}{2} \frac{z_m}{d_m} A_m = w_1^2 A_1 + w_2^2 A_2 + \frac{p_1 A_m}{\rho} \quad (26)$$

umgeschrieben werden kann, liefert für den Druckanstieg im Mischrohr

$$p_m - p_1 = \rho \left[w_1^2 \sigma \alpha + w_2^2 (1 - \sigma \alpha) - w_m^2 - \lambda \frac{z_m}{d_m} \frac{w_m^2}{2} \right] , \quad (27)$$

wenn die Gln. (21) und (22) berücksichtigt werden. Der Druck p_1 hinter den beiden Düsen nach Einschnürung bzw. Erweiterung sei also identisch, p_m ist der Druck am Ende des Mischrohres.

Die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende des Mischrohrs folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \rho w_m A_m &= \rho w_1 A_1 + \rho w_2 A_2 \\ w_m &= w_1 \sigma \alpha + w_2 (1 - \sigma \alpha) . \end{aligned} \quad (28)$$

Durch teilweises Einsetzen der Geschwindigkeit w_m in Gl. (27) erhält man

$$p_m - p_1 = \rho \left[\sigma \alpha (1 - \sigma \alpha) (w_1 - w_2)^2 - \lambda \frac{z_m}{d_m} \frac{w_m^2}{2} \right]. \quad (29)$$

Bei Vernachlässigung der Wandreibung ($\lambda = 0$) ist der Druckanstieg maximal, wenn zugleich die Bedingungen $w_2 = 0$ (kein Treibstrahl) und $\sigma \alpha = 0,5$ gelten. Kein Druckanstieg stellt sich für $\lambda = 0$ im Strahlapparat ein, wenn $w_1 = w_2$ vorliegt. Dieser Grenzfall tritt ein, wenn der Saugdruck p_0 dem Treibdruck p_e nahe kommt.

2.5 Diffusor

Mit der isentropen Enthalpiedifferenz des gemischten Strahls im Diffusor

$$\Delta h_{sm} = \frac{p_a - p_m}{\rho} \quad (30)$$

und dem isentropen Diffusorwirkungsgrad

$$\eta_{\text{Diff}} := \frac{\Delta h_{sm}}{w_m^2/2} \quad (31)$$

folgt der Druckanstieg im Diffusor

$$p_a - p_m = \eta_{\text{Diff}} \rho \frac{w_m^2}{2}. \quad (32)$$

2.5 Druckdifferenzverhältnis ω und Wirkungsgrad η

Für die Beurteilung von Auslegung und Betrieb ist einerseits das Druckdifferenzverhältnis

$$\omega := \frac{p_a - p_0}{p_e - p_0} \quad (33)$$

und andererseits der Wirkungsgrad des Strahlapparates

$$\eta := \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{p_a - p_0}{p_e - p_a} \quad (34)$$

entscheidend [6].

Die Verdichtung des Saugstrahls vom Saugdruck p_0 auf den Diffusoraustrittsdruck p_a ist mit den Gln. (12), (27) und (32)

$$p_a - p_0 = (p_a - p_m) + (p_m - p_1) - (p_0 - p_1)$$

$$p_a - p_0 = \rho \left[w_1^2 \sigma \alpha + w_2^2 (1 - \sigma \alpha) - \frac{1}{\eta_{D2}} \frac{w_2^2}{2} - w_m^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2} \frac{z_m}{d_m} - \frac{\eta_{Diff}}{2} \right) \right] \quad (35)$$

und die treibende Druckdifferenz mit den Gln. (7) und (12)

$$p_e - p_0 = (p_e - p_1) - (p_0 - p_1)$$

$$p_e - p_0 = \rho \left(\frac{1}{\eta_{D1}} \frac{w_1^2}{2} - \frac{1}{\eta_{D2}} \frac{w_2^2}{2} \right) . \quad (36)$$

Damit folgt für das Druckdifferenzverhältnis nach Gl. (33)

$$\omega = \frac{\left(\frac{w_1}{w_m} \right)^2 \sigma \alpha + \left(\frac{w_2}{w_m} \right)^2 (1 - \sigma \alpha) - \frac{1}{2 \eta_{D2}} \left(\frac{w_2}{w_m} \right)^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{2} \frac{z_m}{d_m} - \frac{\eta_{Diff}}{2} \right)}{\frac{1}{2 \eta_{D1}} \left(\frac{w_1}{w_m} \right)^2 - \frac{1}{2 \eta_{D2}} \left(\frac{w_2}{w_m} \right)^2} . \quad (37)$$

Für den Wirkungsgrad η nach Gl. (34) wird das Druckdifferenzverhältnis

$$\frac{p_a - p_0}{p_e - p_a} = \frac{p_a - p_0}{p_e - p_0 - (p_a - p_0)} = \frac{\omega}{1 - \omega} \quad (38)$$

benötigt, das von ω abhängt. Daraus folgt für den Wirkungsgrad η gemäß Gl. (34) mit den Gln. (2) und (4)

$$\eta := \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{p_a - p_0}{p_e - p_a} = \frac{1 - \xi}{\xi} \frac{\omega}{1 - \omega} . \quad (39)$$

Die Geschwindigkeitsverhältnisse in der Gl. (37) lassen sich wegen der Kontinuitätsgleichung

durch die Massenstrom- und Flächenverhältnisse ersetzen. Mit den Gln. (1), (3), (8), (21) und (22) sind die Geschwindigkeitsverhältnisse

$$\frac{w_1}{w_m} = \frac{\dot{m}_1}{A_1} \frac{A_m}{\dot{m}} = \frac{\xi}{\sigma \alpha} \quad (40)$$

und

$$\frac{w_2}{w_m} = \frac{\dot{m}_2}{A_2} \frac{A_m}{\dot{m}} = \frac{1 - \xi}{1 - \sigma \alpha} \quad (41)$$

Man erkennt, dass das Druckdifferenzverhältnis ω und der Wirkungsgrad η abgesehen von der Einschnürung σ und den Verlustparametern η_{D1} (Treibdüse), η_{D2} (Saugdüse), η_{Diff} (Diffusor) und $\lambda z_m/d_m$ (Wandreibung im Mischrohr) nur von den relativen Größen des Treibstrahlmassenstroms ξ und der Treibdüsenaustrittsfläche α abhängen.

Eine weitere wichtige Kenngröße für die Auslegung eines Strahlapparates

$$\zeta := \frac{\rho}{2} \frac{w_m^2}{p_e - p_0} = \left[\frac{1}{\eta_{D1}} \left(\frac{\xi}{\sigma \alpha} \right)^2 - \frac{1}{\eta_{D2}} \left(\frac{1 - \xi}{1 - \sigma \alpha} \right)^2 \right]^{-1} \quad (42)$$

erhält man aus den Gln. (36), (40) und (41). Sie vergleicht die kinetische Energie der gemischten Strahlen im Mischrohr mit der eingesetzten Druckenergie.

3 Auslegung und Betriebsverhalten eines Strahlapparates

Im Bild 2 ist das Druckdifferenzverhältnis ω nach Gl. (33) bzw. Gl. (37), im Bild 3 ist der Wirkungsgrad η nach Gl. (39) und im Bild 4 ist die Kenngröße ζ nach Gl. (42) dargestellt. Alle drei Größen sind Funktionen des relativen Treibstrahlmassenstroms ξ nach Gl. (1) und der relativen Treibdüsenaustrittsfläche α nach Gl. (15). Vorgegeben wurden folgende konstant angenommene Parameter:

Einschnürung nach Gl. (18)	σ	= 0,90
Treibdüsenwirkungsgrad nach Gl. (6)	η_{D1}	= 0,90
Saugdüsenwirkungsgrad nach Gl. (11)	η_{D2}	= 0,90
Diffusorwirkungsgrad nach Gl. (31)	η_{Diff}	= 0,95
Wandreibungszahl (Mischrohr) nach Gl. (24)	λ	= 0,02
relative Mischrohlänge in Gl. (23)	z_m/d_m	= 4,167

Diese Werte sind Bestwerte für den Strahlapparat nach Bild 1, da sie mit der Finite-Elemente-Methode ohne Berücksichtigung der Wandreibung, das Mischrohr ausgenommen, gewonnen wurden. Jeder Strahlapparat, gekennzeichnet durch ein bestimmtes α , hat bei einem bestimmten ξ seinen maximalen Wirkungsgrad η (vergl. Bild 3). Das Maximum der Maxima liegt etwa bei $\xi = 0,5$ und $\alpha = 0,35$.

Zum Gebrauch sei folgendes Auslegungsbeispiel genannt. Es soll der Massenstrom $\dot{m}_2 = 0,01$ kg/s vom Saugdruck $p_0 = 90$ kPa auf den Gegendruck $p_a = 100$ kPa unter optimalen Bedingungen gefördert werden. Welche Hauptabmessungen hat der Strahlapparat, wie groß müssen der Treibdruck p_e und der Treibstrahlmassenstrom \dot{m}_1 gewählt werden? Aus dem oben angegebenen Bestwert $\xi = 0,5$ folgt mit Gl. (4) $\mu = 1$, somit ist $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0,01$ kg/s. Aus Bild 2 entnimmt man bei $\xi = 0,5$ und $\alpha = 0,35$ etwa das Druckdifferenzverhältnis $\omega = 0,25$. Mit der Definitionsgleichung (33) ist $p_e - p_0 = (p_a - p_0) / \omega = 40$ kPa, der Treibdruck beträgt also $p_e = 130$ kPa. Im Bild 4 oder mit Gl. (42) findet man die Kenngröße $\zeta = 0,45$. Die Geschwindigkeit am Ende des Mischrohres ist also $w_m = [2 \zeta (p_e - p_0) / \rho]^{0,5} = 175$ m/s. Mit Gl. (8) folgt die Querschnittsfläche des Mischrohres $A_m = \dot{m} / (\rho w_m) = 96,85$ mm². Dieser Fläche entspricht der Mischrohdurchmesser $d_m = 11$ mm. Mit Gl. (15) ist der Durchmesser der Treibdüse $d_{D1} = d_m \alpha^{0,5} = 6,5$ mm.

Zu beachten ist, dass bei dieser Art der Auslegung der Saugstrom \dot{m}_2 nur geringfügig steigen darf, da sowohl der Wirkungsgrad η (Bild 3) als auch die relative Druckerhöhung ω (Bild 2) mit sinkendem Wert ξ , d. h. Zunahme von \dot{m}_2 , einbrechen.

Um das Betriebsverhalten eines Strahlapparates zu deuten, sei der im Abschnitt 4 untersuchte Strahlapparat mit der relativen Treibdüsenfläche $\alpha = 0,467$ gegeben. Dann ist im Bild 2 der maximal mögliche Saugstrahlmassenstrom als Schnittpunkt der α -Kurve mit der Horizontalen $\omega = 0$ zu finden. Man liest $\xi = 0,488$ ab, entsprechend $\mu = 0,953$, d. h. der maximal mögliche Saugstrom ohne Verdichtung beträgt $\dot{m}_2 = 0,0105$ kg/s. Die maximale Verdichtung eines unendlich kleinen Saugstroms liegt bei $\xi = 1$ vor. Sie beträgt, ausgedrückt durch das Druckdifferenzverhältnis, $\omega = 0,575$. In diesen beiden Grenzpunkten verschwindet der Wirkungsgrad η (Bild 3), einerseits wegen der fehlenden Verdichtung und andererseits wegen des verschwundenen Saugstroms. Wird, beispielsweise ausgehend vom Optimalpunkt ($\xi = 0,62$), bei konstanten Drücken p_e und p_a der Saugdruck p_0 durch Drosselung verringert, steigt das Druckdifferenzverhältnis gemäß der Formulierung $\omega = [(p_e - p_a)/(p_a - p_0) + 1]^{-1}$; damit wächst nach Bild 2 der relative Treibstrahlmassenstrom ξ , d. h. der Saugstrom verringert sich.

4 Die Finite-Elemente-Methode am Strahlapparat

4.1 Zweidimensionales Strömungsmodell

Für die stationäre Durchströmung des Strahlapparates nach Bild 1 wurde als Fluid trockene Luft im Umgebungszustand des Diffusoraustritts mit der Temperatur $t_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ und dem Druck $p_a = 100 \text{ kPa}$ gewählt. Die Stoffwerte der inkompressibel angenommenen Luft sind die Dichte $\rho = 1,18 \text{ kg/m}^3$ und der kinematische Viskositätskoeffizient $\nu = 15,46 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Für das Geschwindigkeitsfeld sind die Massen- und Impulsbilanz zu lösen. Die Massenbilanz als Kontinuitätsgleichung eines Fluidelementes ist

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad , \quad (43)$$

die Impulsbilanz einer laminaren inkompressiblen Strömung wird durch die Navier-Stokes-Gleichung [7]

$$(\vec{w} \cdot \operatorname{grad}) \vec{w} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{w} = \vec{0} \quad , \quad (44)$$

in der Volumenkräfte vernachlässigt sind, wiedergegeben. Wegen der Achsensymmetrie lässt sich das Problem zweidimensional durch die Zylinderkoordinaten z (Achsenrichtung) und r (Radialrichtung) lösen.

Die kritische Reynoldszahl $Re_k = 2300$ wird bei allen Rechnungen deutlich überschritten, d. h. die Navier-Stokes-Gleichung (44) muss durch einen Fluktuationsterm, den Reynoldsschen Spannungstensor erweitert werden, und die Geschwindigkeiten sind als statistische Mittelwerte zu interpretieren. Das k - ϵ -Modell ist das am häufigsten in der Technik genutzte Turbulenzmodell. In diesem Modell müssen zwei zusätzliche Transportgleichungen für die beiden Variablen k , die turbulente kinetische Energie, und ϵ , den Dissipationsstrom der turbulenten Energie, gelöst werden. Die benötigten Konstanten sind dem Handbuch [8] entnommen.

4.2 Ergebnisse

Die wichtigsten Abmessungen des in Bild 1 untersuchten Strahlapparates, der der Arbeit von Weydanz [9] entlehnt wurde, sind:

Treibdüsenaustrittsfläche	$A_{1\text{ geo}}$	= 52,8 mm ²
Saugdüsenaustrittsfläche	$A_{2\text{ geo}}$	= 60,3 mm ²
Mischrohrquerschnitt	A_m	= 113 mm ²
relative Treibdüsenaustrittsfläche	α	= 0,467
Treibdüsenaustrittsdurchmesser	d_{D1}	= 8,2 mm
Mischrohrdurchmesser	d_m	= 12 mm
Treibdüsenlänge	z_{D1}	= 50 mm
Mischrohrlänge	z_m	= 50 mm
relative Mischrohrlänge	z_m/d_m	= 4,167

Bild 5 zeigt einen halbseitigen Längsschnitt des Geschwindigkeitsfeldes durchströmender Luft im Strahlapparat ohne Ansaugung ($\xi = 1$). Die Längsachse z ist stark gestaucht und verläuft senkrecht von unten ($z = 0$ m) nach oben ($z = 0,33$ m), die Radialrichtung erstreckt sich waagrecht von links ($r = 0$ m) nach rechts ($r = 0,015$ m). Beim mittleren Eingangsdruck $p_e = 108,95$ kPa beträgt der Treibstrahlmassenstrom $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s, was der Eintrittsgeschwindigkeit $w_{e1} = 3$ m/s entspricht. Dieser Treibstrahlmassenstrom blieb bei allen Rechnungen unverändert, damit die Schallgeschwindigkeit deutlich unterschritten blieb.

Am Stromlinienverlauf (weiß) erkennt man die Einschnürung σ unmittelbar hinter der Treibdüsenmündung ($z = 0,05$ m), die zu einer abrupten Erhöhung der Treibstrahlgeschwindigkeit führt (dunkle Rotfärbung). In der Mündung der Saugdüse hat sich ein Totwassergebiet gebildet, denn die Stromlinien verlaufen kreisförmig geschlossen. Am Ende des Mischrohres ($z = 0,1$ m) hat sich die Strömung weitgehend auf den gesamten Querschnitt ($r_m = 6$ mm) durch Aufweitung verteilt, was die gleichmäßige Grünfärbung andeutet. Im anschließenden Diffusor wird die Treibstrahlgeschwindigkeit auf die Eingangsgeschwindigkeit zurückgeführt, da die Querschnitte von Treibdüsenaustritt und Diffusorausstritt gleich bemessen sind (Bild 1).

Bild 6 zeigt denselben Schnitt für das Druckfeld als Überdruck in der Einheit Pa. Der mittlere Saugdruck beträgt -11,29 kPa, dem Absolutdruck $p_0 = 88,71$ kPa entsprechend. Der Gegendruck am Ende des Diffusors ist der Umgebungsdruck $p_a = 100$ kPa. Man erhält mit Gl. (33) das Druckdifferenzverhältnis $\omega = 0,56$.

Längs der Strahlapparatachse z , im konstanten radialen Abstand $r = 2$ mm, sind im Bild 7 der Überdruck p und die Geschwindigkeit w dargestellt. Die Reaktion der Strömung auf die Einschnürung hinter der Treibdüsenmündung ($z = 0,05$ m) ist deutlich sichtbar. Der maßgebende Druckanstieg nach der Düse stellt sich hier nicht im Diffusor, sondern wegen $w_2 = 0$ gemäß Gl. (29) im Mischrohr ($z = 0,05 \dots 0,1$ m) ein. Das Mischrohr ist auslegungsbedingt etwas zu kurz,

da die Geschwindigkeit w am Ende des Mischrohres, das konstanten Querschnitt hat, als Funktion von z nicht vollständig horizontal verläuft.

Bild 8 zeigt den halbseitigen Ausschnitt des Geschwindigkeitsfeldes im Ansaugbetrieb. An- gesaugt wird der Massenstrom $\dot{m}_2 = 0,0025 \text{ kg/s}$ mit der Eintrittsgeschwindigkeit an der Saug- düse $w_{e2} = 1,764 \text{ m/s}$. Der relative Treibstrahlmassenstrom berechnet sich mit Gl. (1) zu $\xi = 0,8$. Am Stromlinienverlauf hinter der Saugdüse ($z = 0,05 \text{ m}$) lässt sich deutlich die erhebliche Saugstrahlerweiterung, die mit der Treibstrahleinschnürung einhergeht, nachvollziehen.

Im Bild 9, kaum ablesbar, hat sich der Treibdruck auf $p_e = 109,81 \text{ kPa}$ erhöht. Ebenso ist der Saugdruck auf $p_0 = 90,68 \text{ kPa}$ gestiegen. Bei unverändertem Gegendruck $p_a = 100 \text{ kPa}$ folgt das Druckdifferenzverhältnis $\omega = 0,49$.

Längs der Strahlapparatachse z , in den radialen Abständen $r = 2 \text{ mm}$ (Treibstrahl) und $r = 5.5 \text{ mm}$ (Saugstrahl), sind im Bild 10 die Geschwindigkeiten beider Strahlen gegenübergestellt. Die Einschnürung des Treibstrahls am Düsenaustritt ($z = 0,05 \text{ m}$), bemerkbar durch die Geschwin- digkeitsanhebung, verursacht die Erweiterung des Saugstrahls, erkennbar an der Geschwindig- keitsabsenkung. Der Mischprozess bzw. der Geschwindigkeitsausgleich beider Strahlen ist erst im vorderen Bereich des Diffusors ($z = 0,14 \text{ m}$) abgeschlossen. Der Diffusor beginnt bei $z = 0,1 \text{ m}$.

Inwieweit die Annahme bei der Formulierung des Impulssatzes in Gl. (25) erfüllt ist, dass der Druck p_1 nach der Treibstrahleinschnürung und der Saugstrahlerweiterung hinter den Düsen über den Durchströmquerschnitt A_m konstant ist, lässt sich im Bild 11 ablesen. Dargestellt sind die Überdrücke des Treibstrahls und des Saugstrahls entlang der Strahlachse z in den radialen Abständen des Bildes 10. Abweichend zum Bild 10 wurde allerdings die Rechnung für gleiche Massenströme $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0,01 \text{ kg/s}$, also $\xi = 0,5$, durchgeführt, damit der geringe Druckanstieg im Mischrohr deutlich wird. Durch den Effekt der Treibstrahleinschnürung und der Saugstrah- lerweiterung werden die Drücke fast vollständig aneinander angeglichen. Dies gilt auch bei anderen ξ -Werten. Im Gegensatz zum Betrieb ohne Ansaugung (Bild 7) steigt der Druck entscheidend im Diffusor, da nach Gl. (29) mit einer Saugstrahlgeschwindigkeit w_2 , die nahe an die Treibstrahlgeschwindigkeit w_1 heranreicht, kein Druckanstieg im Mischrohr auftreten kann. Der Treibstrahl Druck beträgt $p_e = 106,95 \text{ kPa}$, der Saugdruck $p_0 = 98,94 \text{ kPa}$ ($z = 0,03 \text{ m}$) und der Gegendruck $p_a = 100 \text{ kPa}$. Das Druckdifferenzverhältnis ist also $\omega = 0,13$.

Weitere Rechnungen, unverändert ohne Wandreibung, wurden mit einem erweiterten Mischrohr des Durchmessers $d_m = 0,014 \text{ m}$ durchgeführt, um die optimalen Strahlapparat-Parameter, wie

sie im Abschnitt 3 oder Bild 2 angegeben sind, für das eindimensionale Modell festzulegen. Bei ansonsten gleichen Abmessungen des Strahlapparates (Bild 1) war jetzt die relative Treibdüsenfläche $\alpha = 0,343$ und die relative Mischrohrlänge $z_m/d_m = 3,57$. Die berechneten Druckdifferenzverhältnisse, definiert in Gl. (33), des eindimensionalen Modells ω_I und der Finite-Elemente-Methode ω_{II} für den Strahlapparat nach Bild 1 sind abschließend gegenübergestellt:

d_m in mm	ξ nach Gl. (1)	ω_{II}	ω_I	$(\omega_I - \omega_{II}) / \omega_{II}$ in %
12	1,0	0,563	0,576	3,4
	0,8	0,487	0,493	1,2
	0,667	0,415	0,411	-1,0
	0,571	0,318	0,309	-2,9
	0,5	0,13	0,124	-4,7
14	1,0	0,444	0,460	3,5
	0,667	0,363	0,370	1,9
	0,5	0,318	0,274	-13,0

Danach beträgt die maximale relative Abweichung beider Modelle -13 %. Nach dem eindimensionalen Modell fallen die ω -Werte im Bild 2 mit sinkenden ξ -Werten rascher als nach der Finite-Elemente-Methode.

5 Zusammenfassung

Die Finite-Elemente-Methode wurde zur Modellierung unterkritischer Strömungen durch Strahlapparate angewendet. Modellfluid war trockene Luft konstanter Dichte im Umgebungszustand. Variiert wurde der Mischrohrquerschnitt sowie das Verhältnis von Saugstrahl- und Treibstrahlmassenstrom im Bereich $1/\mu = 0 \dots 1$. Zur Inter- oder Extrapolation der Rechenergebnisse nach der Finite-Elemente-Methode wurde ein einfaches eindimensionales Strömungsmodell mit einheitenlosen Parametern entwickelt. Zur graphischen Darstellung der Ergebnisse werden neue Diagramme vorgeschlagen, in denen man das Betriebsverhalten des Strahlapparates in Form des Druckdifferenzverhältnisses ω (relative Saugstrahlverdichtung) und des Wirkungsgrades η ablesen kann. Zur Auslegung benötigt man zusätzlich die Kenngröße ζ nach Gl. (42). Die maximale relative Abweichung zwischen dem eindimensionalen Modell und der Finite-Elemente-Methode beträgt -13 %. Es ist geplant, die eindimensionale Theorie auf kompressible Fluide für Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit auszudehnen.

Schriftum

- [1] FEMLAB 3.1: Stockholm: COMSOL AB Oct. 2004
- [2] Bosnjakovic, F.: Technische Thermodynamik Teil 1. Leipzig: VEB Deutscher Verlag 1988. S. 372
- [3] Körting: Arbeitsblätter für die Strahlpumpenanwendung. Hannover: Körting AG 2005
- [4] Baehr, H. D.: Thermodynamik, 9. Aufl. Berlin: Springer 1996, S. 243
- [5] Gertsen, K.: Einführung in die Strömungsmechanik. Düsseldorf: Bertelsmann 1974, S. 99
- [6] Flügel, G.: Berechnung von Strahlapparaten. VDI-Forschungsheft 395, 2. Aufl. (1951). Düsseldorf: VDI-Verlag, S. 3
- [7] Baehr, H. D.; Stephan, K.: Wärme- und Stoffübertragung. Berlin: Springer 1994, S. 283
- [8] FEMLAB 3.1: Chemical Engineering Module, User's Guide. Stockholm: COMSOL AB, S. 107
- [9] Weydanz, W.: Die Vorgänge in Strahlapparaten, 2. Aufl. Düsseldorf: VDI-Verlag 1963, S.11

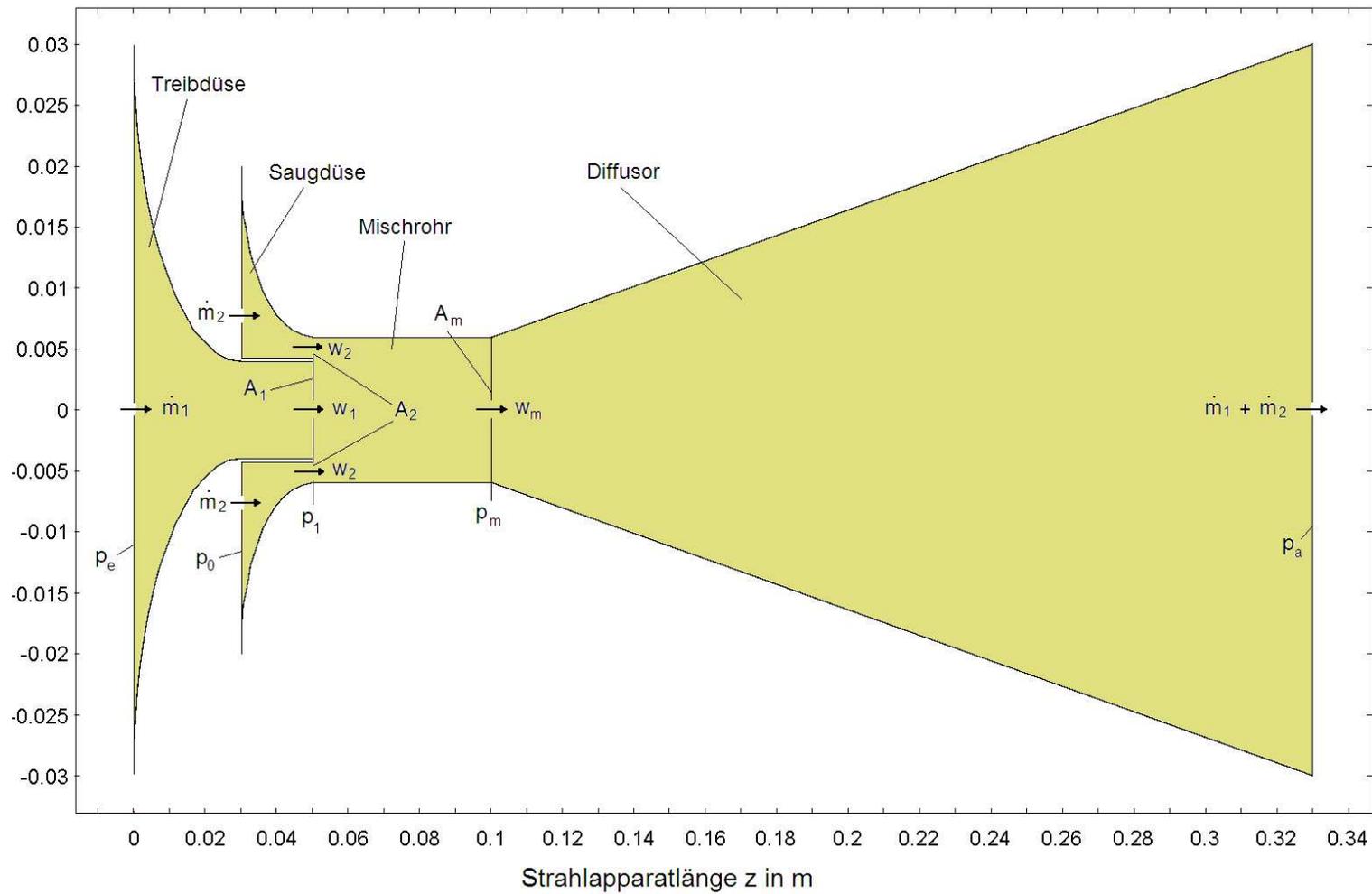


Bild 1: Strahlapparat im Längsschnitt. Die Länge z ist gegenüber dem Radius um den Faktor 0,293 gestaucht.

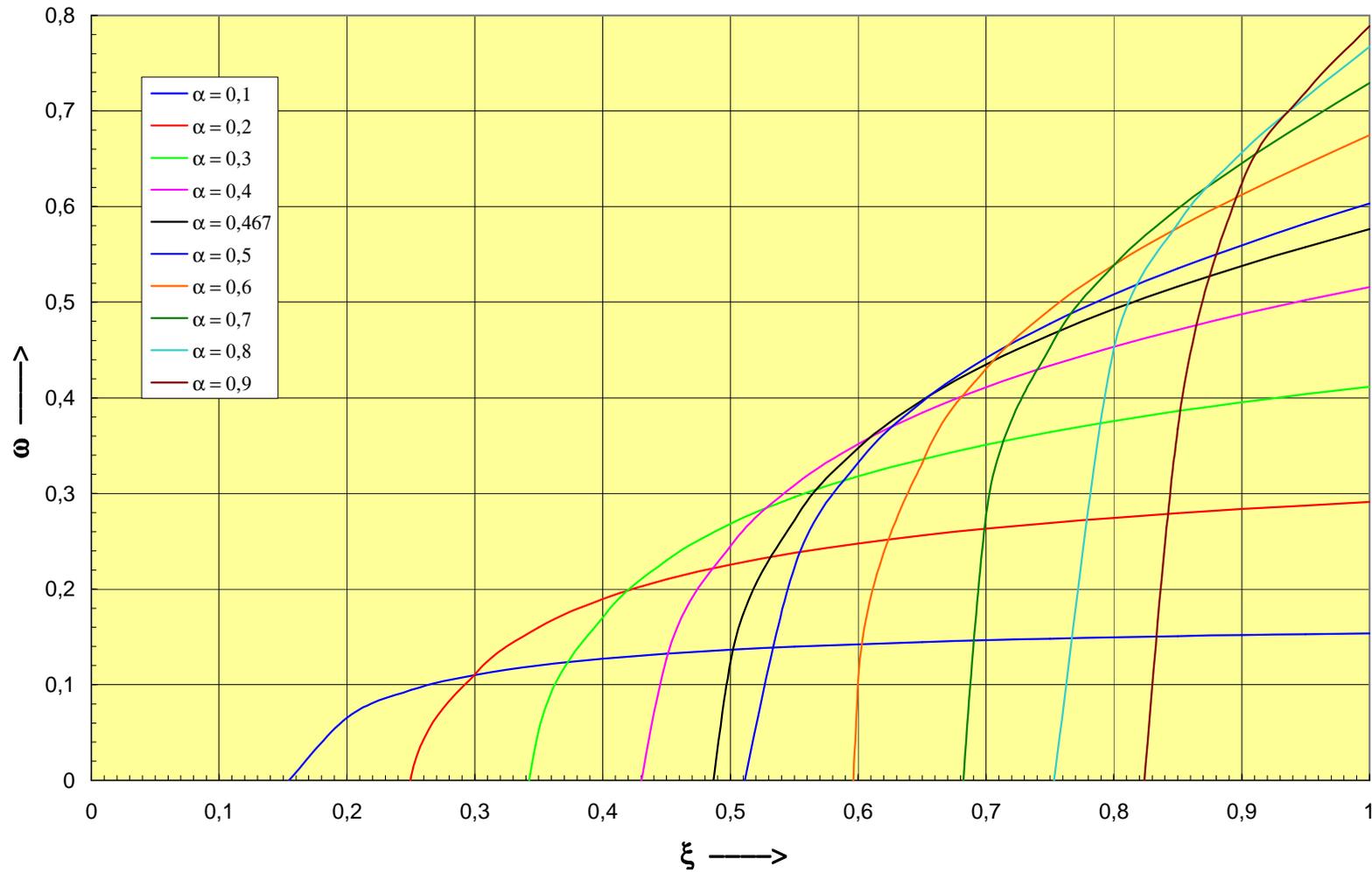


Bild 2: Druckdifferenzverhältnis ω nach Gl. (33) als Funktion des relativen Treibstrahlmassenstroms ξ nach Gl. (1) und der relativen Treibdüsenfläche α nach Gl. (15). Vorgegebene Parameter: $\sigma = \eta_{D1} = \eta_{D2} = 0,90$; $\eta_{Diff} = 0,95$; $\lambda = 0,02$ und $z_m/d_m = 4,167$.

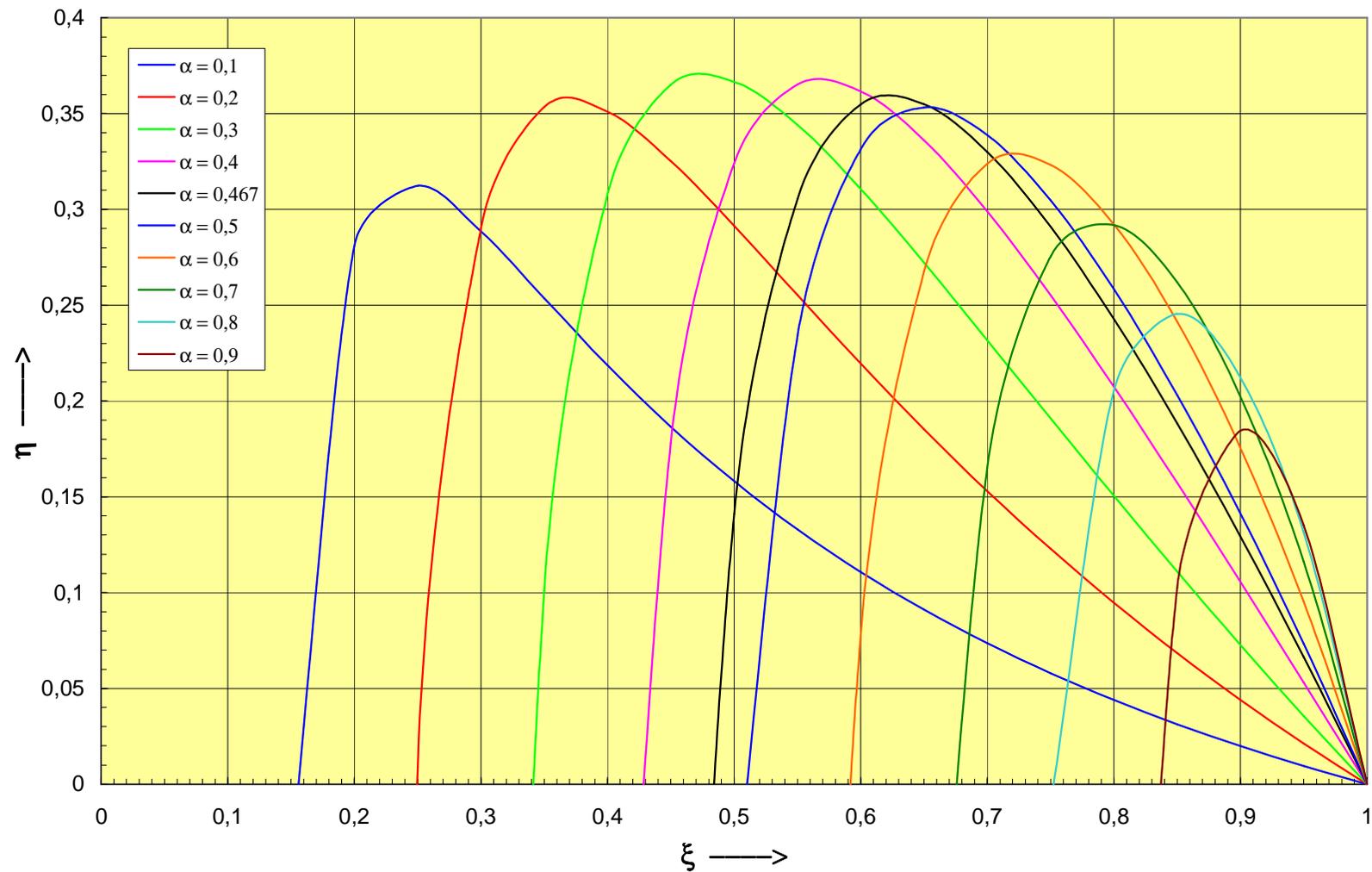


Bild 3: Wirkungsgrad η nach Gl. (34) als Funktion des relativen Treibstrahlmassenstroms ξ nach Gl. (1) und der relativen Treibdüsenfläche α nach Gl. (15). Vorgegebene Parameter: $\sigma = \eta_{D1} = \eta_{D2} = 0,90$; $\eta_{Diff} = 0,95$; $\lambda = 0,02$ und $z_m/d_m = 4,167$.

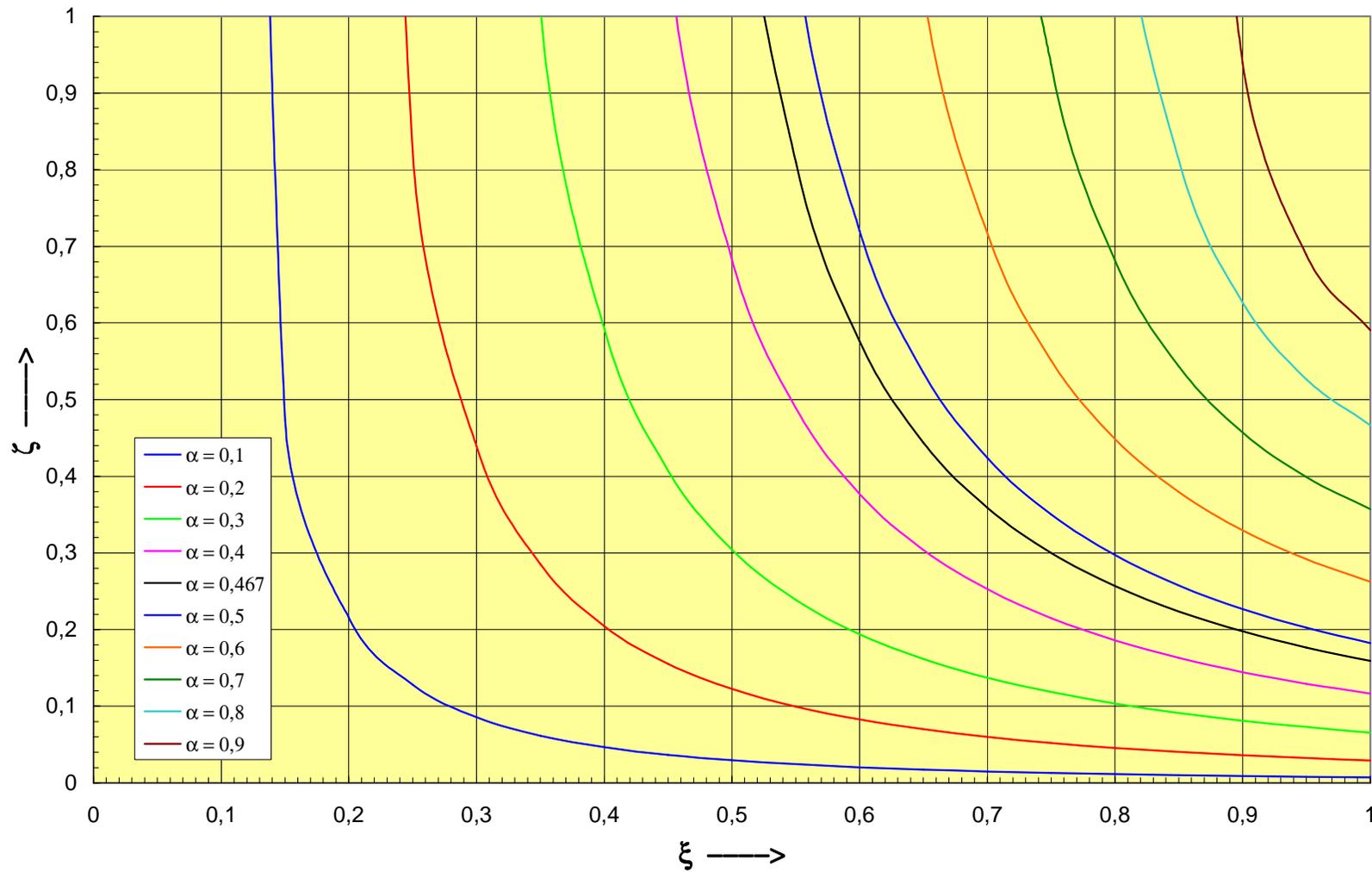


Bild 4: Kenngröße ζ nach Gl. (42) als Funktion des relativen Treibstrahlmassenstroms ξ nach Gl. (1) und der relativen Treibdüsenfläche α nach Gl. (15). Vorgegebene Parameter: $\sigma = \eta_{D1} = \eta_{D2} = 0,90$; $\eta_{Diff} = 0,95$; $\lambda = 0,02$ und $z_m/d_m = 4,167$.

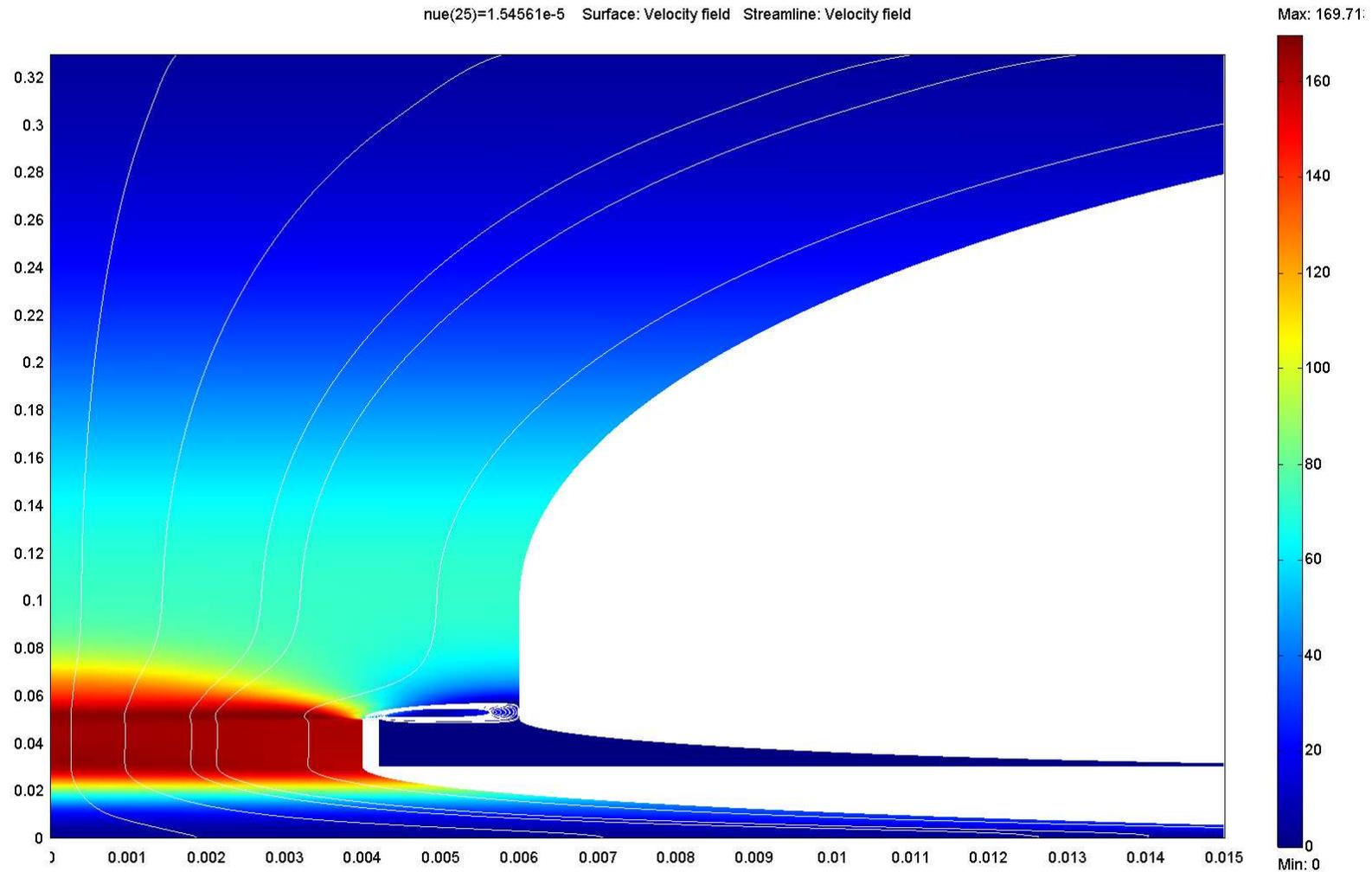


Bild 5: Halbseitiges Geschwindigkeitsfeld durchströmender Luft im Strahlapparat nach Bild 1 ohne Ansaugung ($\xi = 1$). Gestauchte Längsachse z verläuft von unten nach oben. Treibstrahlmassenstrom: $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s. Relative Treibdüsenfläche: $\alpha = 0,467$.

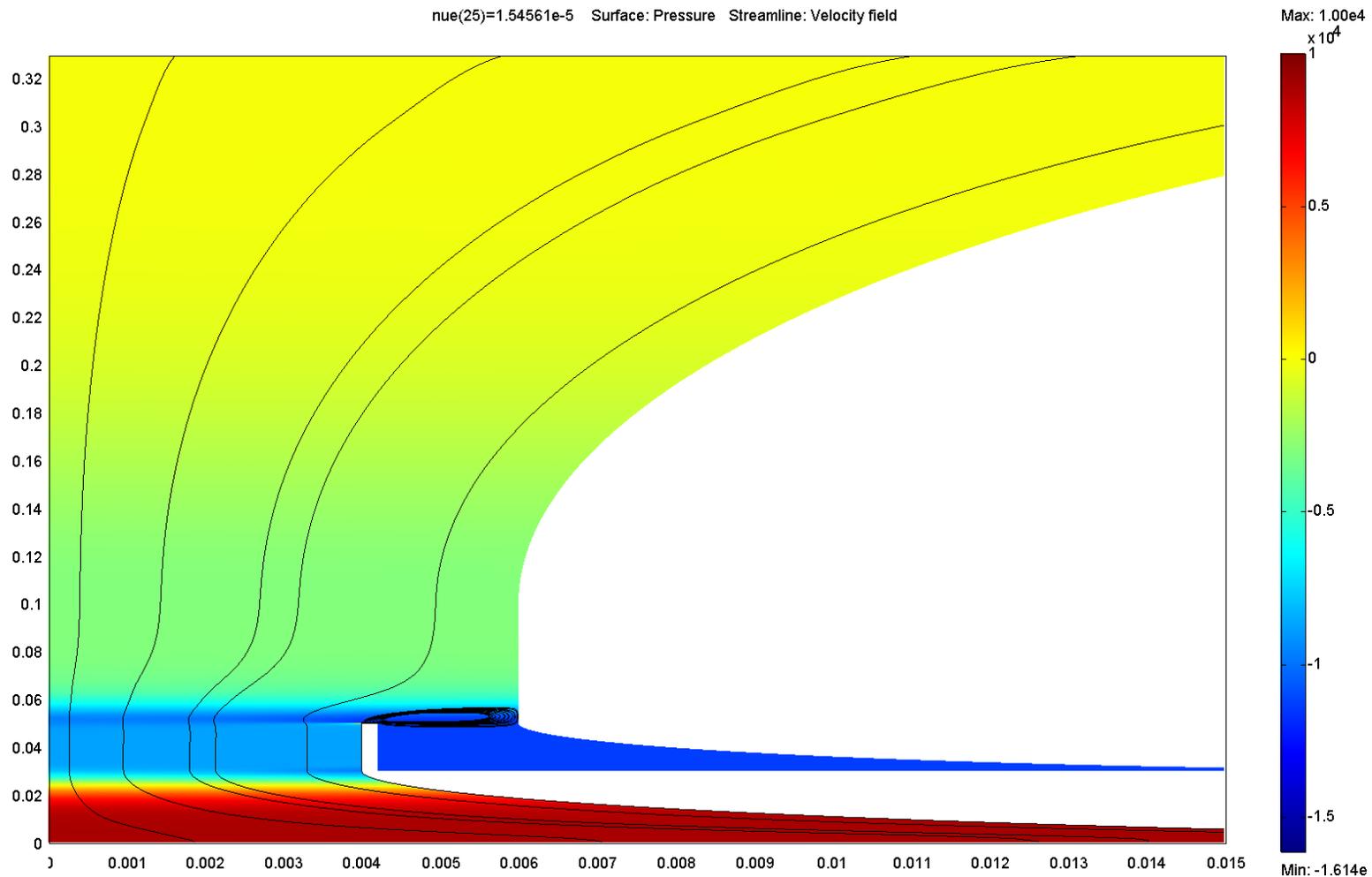


Bild 6: Halbseitiges Druckfeld als Überdruck in Pa im Strahlapparat nach Bild 1 ohne Ansaugung ($\xi = 1$). Gestauchte Längsachse z verläuft von unten nach oben. Stromlinien in schwarz. Treibstrahlmassenstrom: $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s. Relative Treibdüsenfläche: $\alpha = 0,467$.

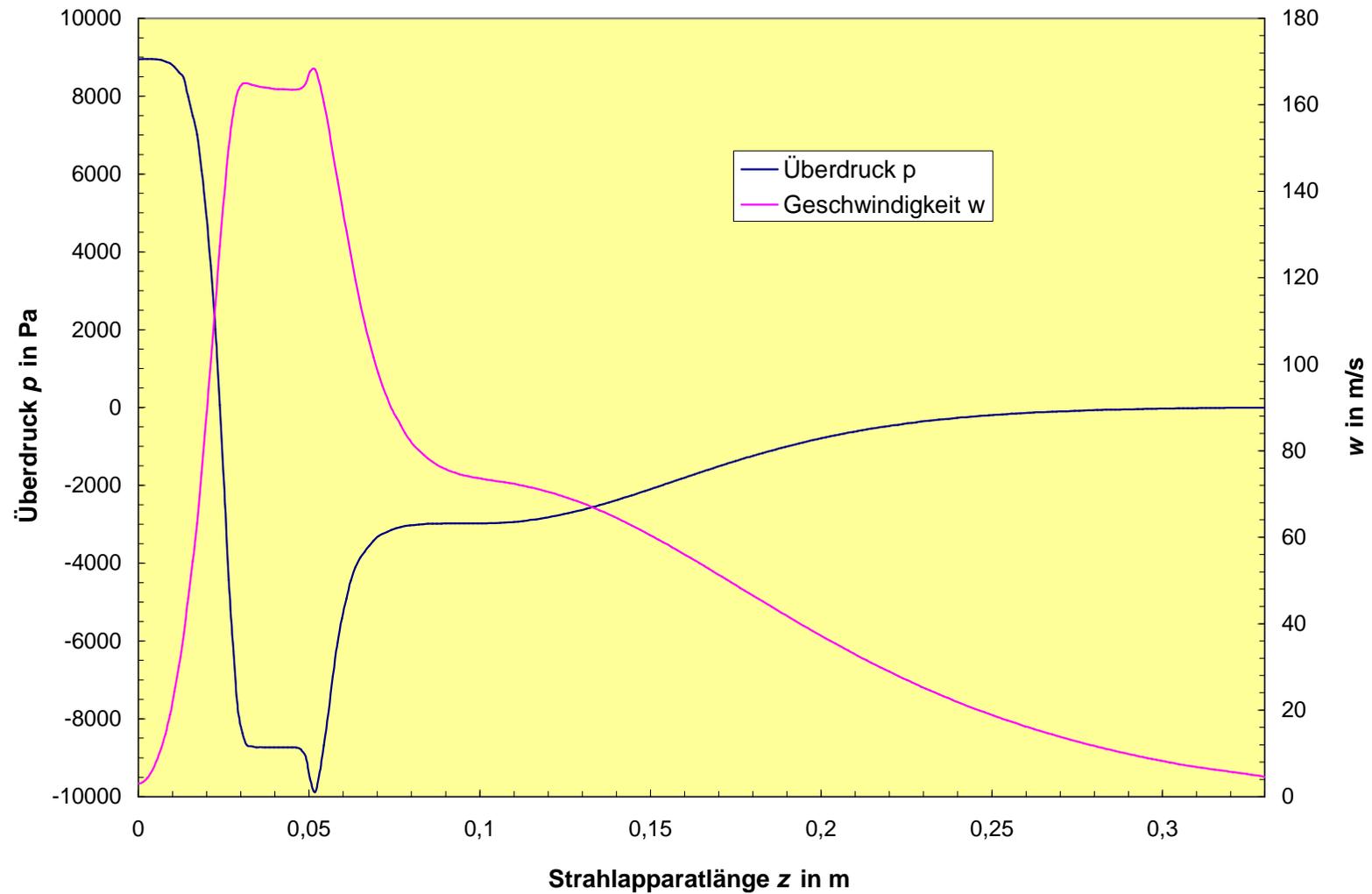


Bild 7: Druck p und Geschwindigkeit w längs der Strahlapparatachse z im radialen Abstand $r = 2$ mm bei Luftbetrieb ohne Ansaugung. Treibstrahlmassenstrom: $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s. Relative Treibdüsensfläche: $\alpha = 0,467$.

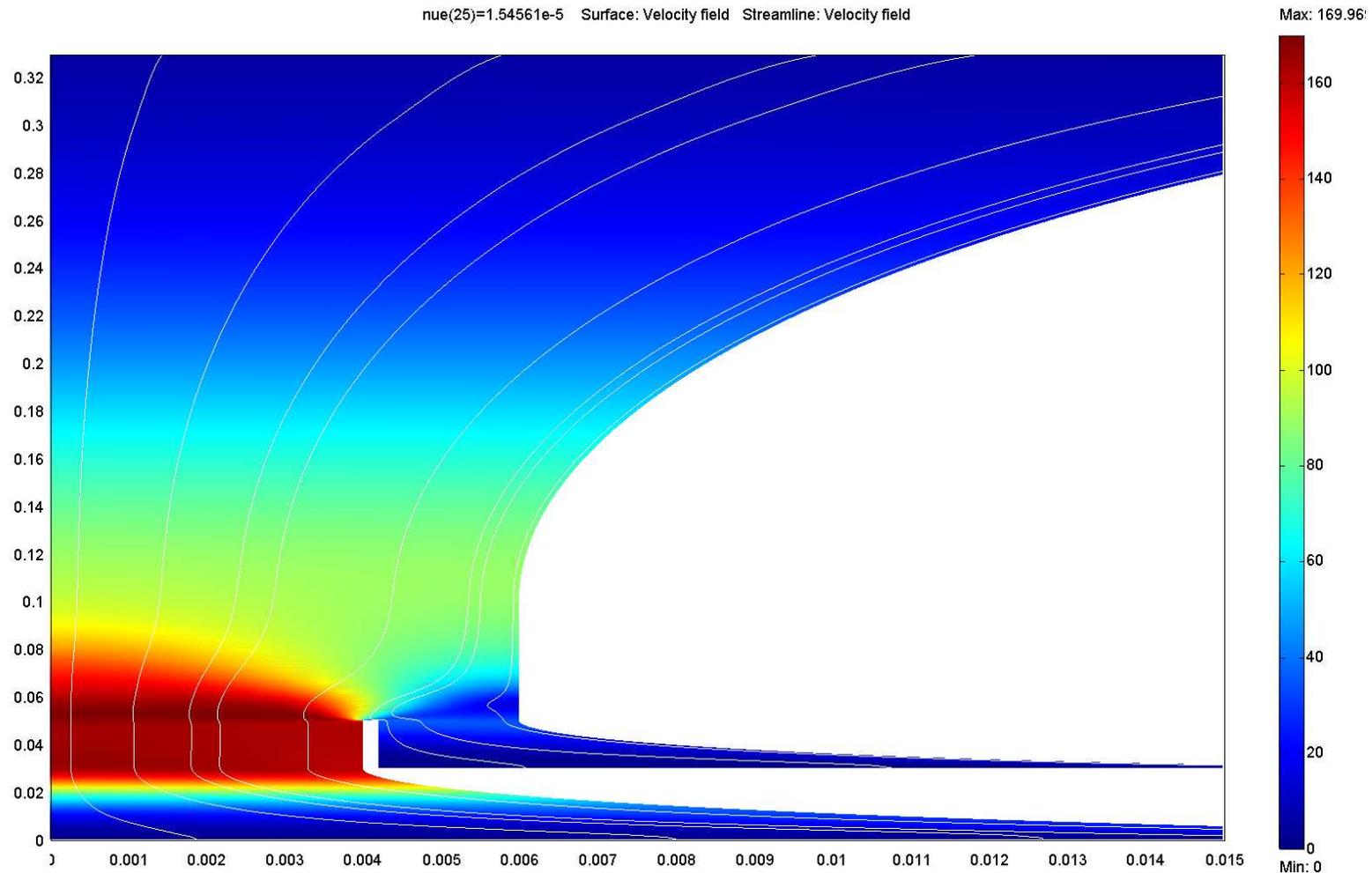


Bild 8: Halbseitiges Geschwindigkeitsfeld im Strahlapparat nach Bild 1 mit Ansaugung ($\xi = 0,8$). Gestauchte Längsachse z verläuft senkrecht. Treibstrahlmassenstrom: $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s. Saugstrahlmassenstrom: $\dot{m}_2 = 0,0025$ kg/s. Relative Treibdüsenfläche: $\alpha = 0,467$.

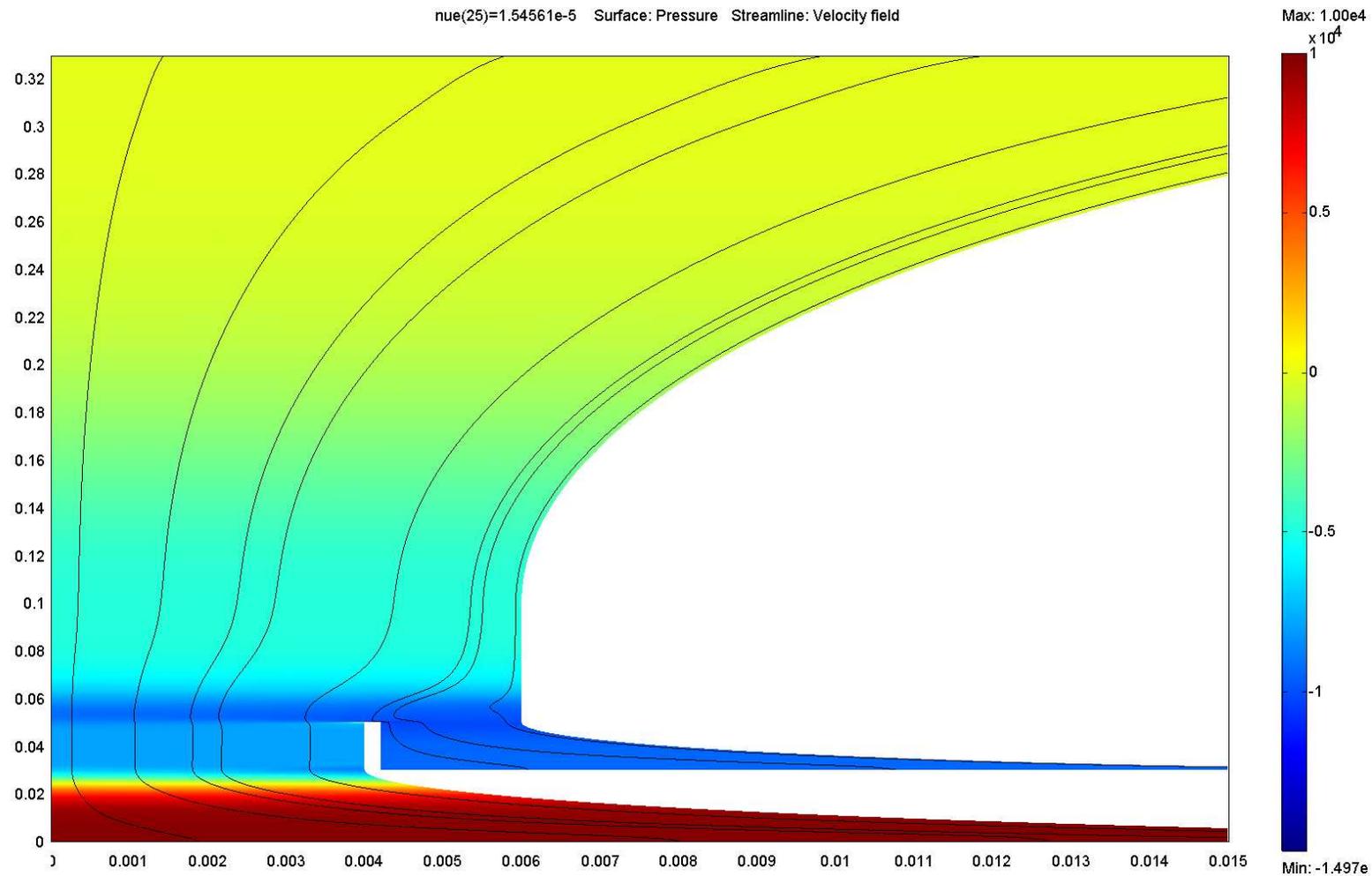


Bild 9: Halbsseitiges Druckfeld als Überdruck in Pa im Strahlapparat nach Bild 1 mit Ansaugung ($\xi = 0,8$). Gestauchte Längsachse z verläuft senkrecht. Treibstrahlmassenstrom: $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s. Saugstrahlmassenstrom: $\dot{m}_2 = 0,0025$ kg/s. Relative Treibdüsenfläche: $\alpha = 0,467$.

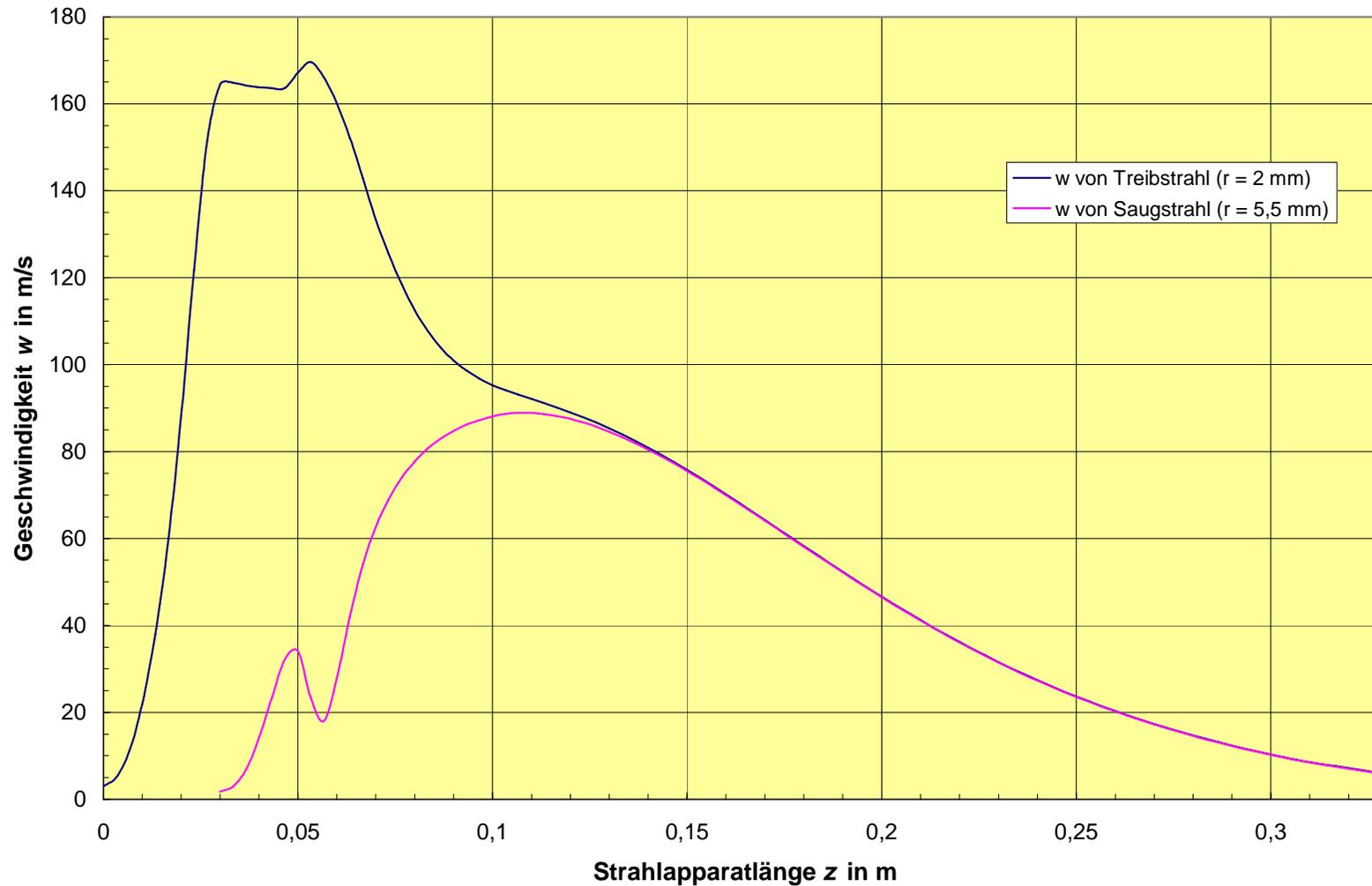


Bild 10: Geschwindigkeiten entlang der Strahlapparatachse z in den radialen Abständen $r = 2$ mm (Treibstrahl) und $r = 5.5$ mm (Saugstrahl) bei Saugbetrieb mit $\xi = 0.8$ entsprechend Bild 8.

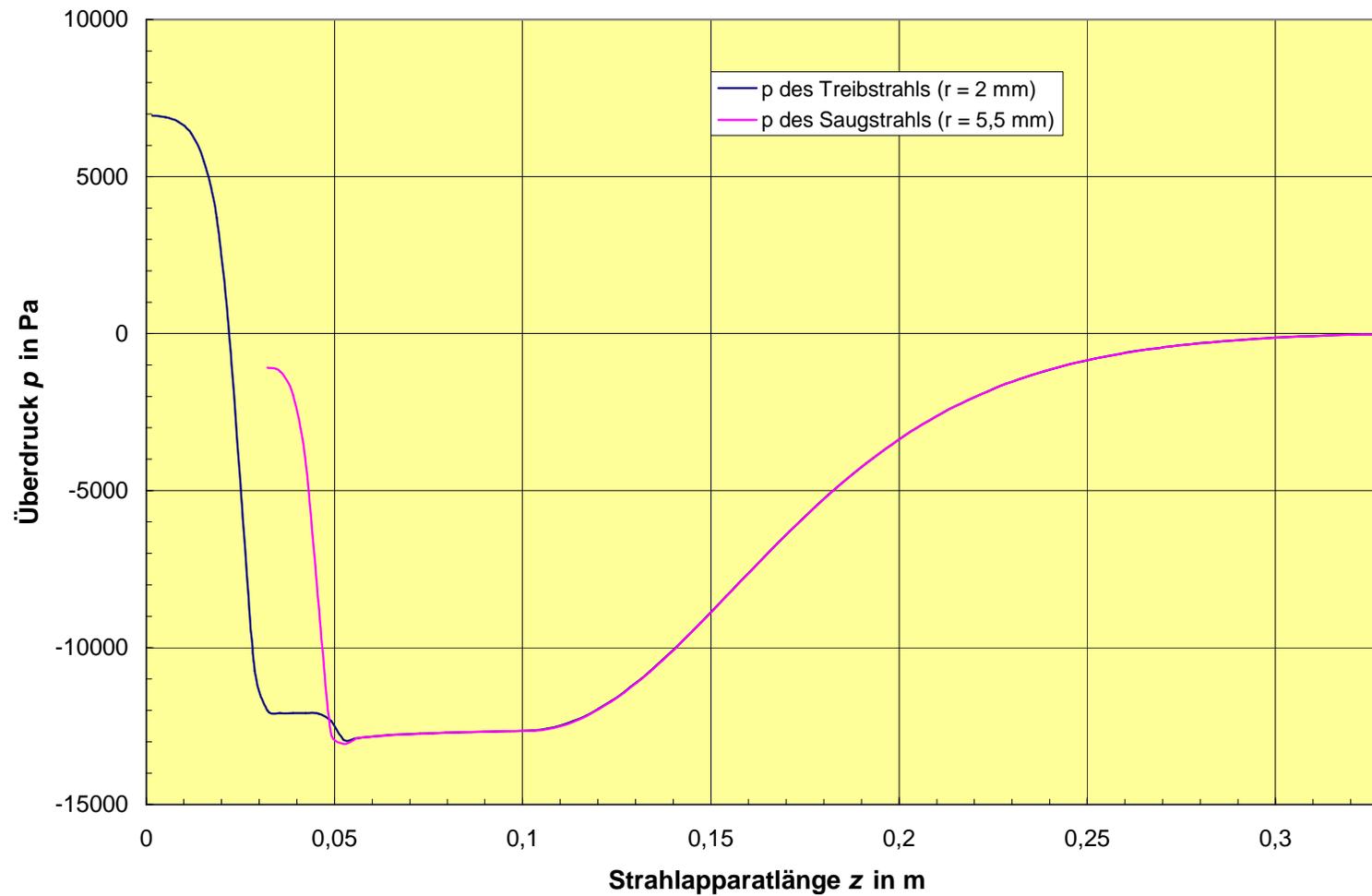


Bild 11: Drücke entlang der Strahlapparatachse z in den radialen Abständen $r = 2$ mm (Treibstrahl) und $r = 5,5$ mm (Saugstrahl) bei Saugbetrieb mit $\xi = 0,5$. Treibstrahlmassenstrom: $\dot{m}_1 = 0,01$ kg/s. Saugstrahlmassenstrom: $\dot{m}_2 = 0,01$ kg/s. $\alpha = 0,467$.