

fahrwerkentwicklung

berechnung und darstellung von gelenkwinkeln im fahrwerk

Institut für Kraftfahrwesen Aachen der RWTH Aachen (ika); ZF Lemförder Fahrwerktechnik GmbH & Co. KG, Lemförde



Dipl.-Ing. Ingo Albers, ist im Institut für Kraftfahrwesen Aachen der RWTH Aachen im Geschäftsbe-
reich Fahrwerk tätig und ist organisatorischer Leiter des Aachener Kolloquiums Fahrzeug- und Motoren-
technik.

» Immer kürzere Entwicklungszeiten und immer höhere Anforderungen an die Funktionalität von Fahrwerksystemen erfordern einen effizienten Entwicklungsprozess. Eine sorgfältige Vorentwicklung stellt sicher, dass Parameter frühzeitig eingebunden werden und dass Bedingungen für die folgenden Entwicklungsschritte schnell und zuverlässig postuliert werden können. Zusammen mit ZF Lemförder Fahrwerktechnik hat das Institut für Kraftfahrwesen Aachen der RWTH Aachen (ika) ein Berechnungsprogramm für den Einsatz in der Achsvorentwicklung erstellt.

Einführung: Zur starrkinematischen Vorauslegung von Achssystemen ist das Berechnungstool ABE entwickelt worden. Dieses Tool ist modular gestaltet und wurde stetig weiterentwickelt. Bei ABE handelt es sich um ein bewährtes und eigenständiges Entwicklungswerkzeug, das die schnelle kinematische Analyse und Vorauslegung von Fahrzeugachsen ermöglicht.

Nun wurde ABE um ein Modul zur Berechnung der Gelenkwinkel von Kugelgelenken und Gummilagern bei starrkinematischen Bewegungen des Achssystems erweitert. Das neue Gelenkwinkelmodul ist in der Lage, bei den in einem Achssystem entstehenden Bewegungsabläufen mit den beiden Freiheitsgraden „Federbewegung“ und „Lenkbewegung“ die relativen Gelenkstellungen auszuwerten und anschaulich darzustellen.

Das Basistool ABE: Das Softwaretool ABE wurde zur kinematischen Analyse, zum Vergleich bzw. zur Benchmarkanalyse und zur schnellen Vorauslegung von Achssystemen erstellt. Nach Eingabe der kinematisch relevanten Anlenkpunkte der Achse (Hard-points) werden alle

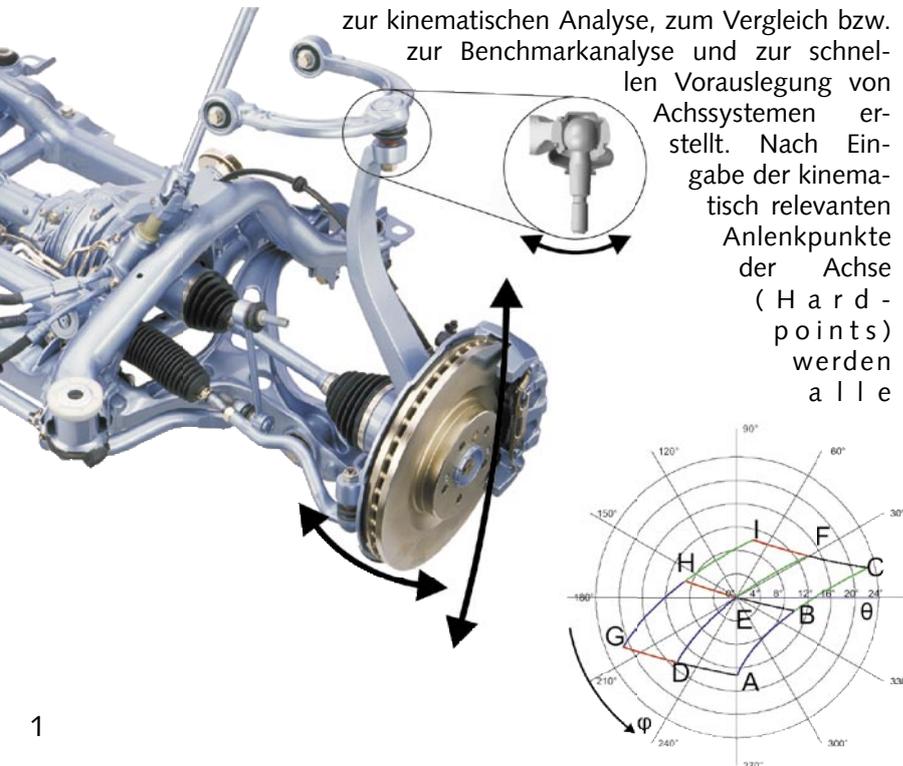
starrkinematischen Fahrwerkkenwerte innerhalb kürzester Zeit berechnet und dargestellt. Schnelle Parametervariationen und Benchmarkanalysen von Achssystemen sind möglich. Das Berechnen von aufgelösten Lenkerverbunden bzw. räumlichen Achskinematiken (z. B. Mehrlenkerachsen) wurde ermöglicht. ABE ist in der Programmiersprache Visual Basic for Applications (VBA) unter Microsoft Excel realisiert und kann lizenzfrei auf nahezu jedem PC eingesetzt werden. Besonders der schnelle Aufbau eines Achssystems auf der Benutzeroberfläche und die intuitive Bedienung machen das Programm für die Akquisition auch beim Kunden vor Ort interessant (**Bild 1**).

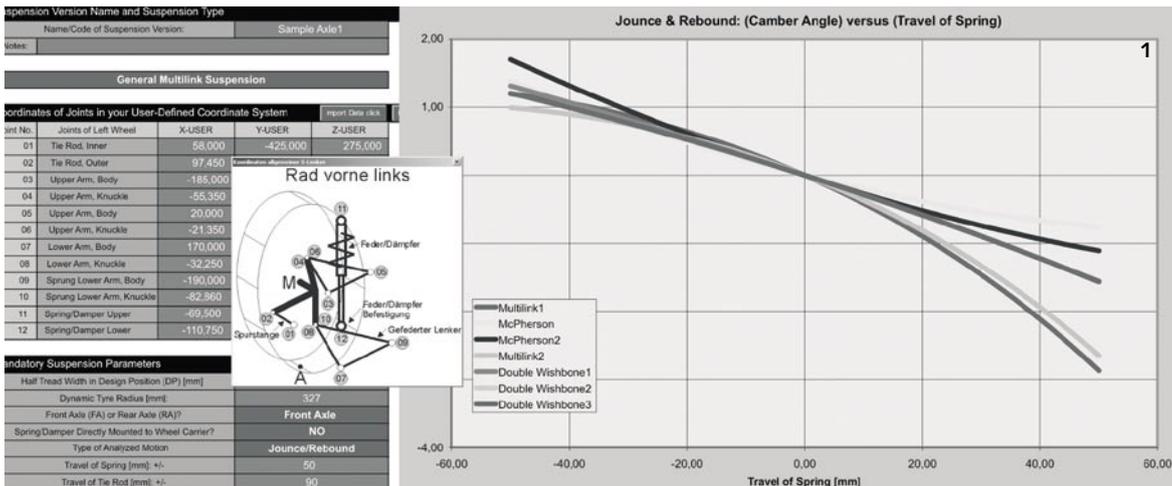
Der Berechnungsalgorithmus basiert auf einem mathematischen Ansatz von Matschinsky [1,2]. Dieser ist in [3] umgesetzt sowie deutlich erweitert worden. Mit diesem Ansatz wird der translatorische und rotatorische Geschwindigkeitszustand des Radträgers berechnet. Die Positionen und Geschwindigkeiten aller beteiligten Punkte innerhalb der Radaufhängung, wie beispielsweise des Radaufstandspunkts oder Radmittelpunkts, liegen damit explizit vor und werden für die Berechnung der Kinematikkenwerte [1,2,3] herangezogen (**Tabelle 1**).

Ein allgemeiner 5-Lenker-Mechanismus bildet die Basis der Berechnungen in ABE, womit sich eine Vielzahl verschiedener Radaufhängungen beschreiben lässt (Doppelquerlenker, Mehrlenkerachse etc.). Weitere Achstypen wie z. B. McPherson-Aufhängungen lassen sich mittels geometrischer und kinematischer Formulierungen ebenfalls mit ABE berechnen. Die Beschreibung der Lenkachsengeometrie auch bei ideellen Lenkachsen sowohl bei Hub- als auch bei Lenkbewegungen erfordert erweiterte Methoden, die in [3] vollständig beschrieben sind.

Gelenkbewegung: Wenn eine Radaufhängung bewegt wird, entstehen Bewegungen der Lenker, die in ABE als 2-Punkt-Lenker aufgefasst werden. Damit verbunden resultieren Bewegungen in den Gelenken, mit denen die Lenker entweder am Fahrzeugaufbau oder am Radträger befestigt sind. In diesem Artikel wird exemplarisch einer der gängigen Fälle betrachtet, bei dem der Lenker fahrzeugseitig mit einem Gummilager an der Karosserie und radträgerseitig mit einem Kugelgelenk befestigt ist. Andere Konfigurationen sind ebenfalls denkbar.

Für jede Radaufhängung werden verschiedene Kugelgelenke und Gummilagern benötigt. Neben der Lastabhängigkeit, die nicht Thema dieses Arti-





- 1 Eingabemaske (links) und Kinematikergebnisse im Vergleichsdiagramm
- 2 Ausgangs- und Zielstellung von Gummilager (links) und Kugelgelenk

kels sein soll, ist die Auslegung insbesondere von den kinematischen Anforderungen an das Gelenk abhängig. Ein Achslieferant wie ZF Lemförder Fahrwerktechnik liefert hauseigene Gelenke und Lager und kann somit in der Achsauslegung und -vorentwicklung bereits wichtige Erkenntnisse für die hausinterne Komponententwicklung generieren. So ist z. B. für ein Kugelgelenk relevant, welche Winkelbereiche maximal erreicht werden und welche Gelenkstellungen über einen definierten Bewegungszyklus angefahren werden. Diese Erkenntnisse beeinflussen maßgeblich das Design des Kugelgelenks. Bei einem Kugelgelenk ist die Bewegung zwischen Gelenkzapfen und Gelenkhäuser kinematisch relevant, während bei einem Gummilager die Bewegung zwischen der Innen- und Außenhülse von Interesse ist (Bild 2).

Gelenkwinkeldarstellung: Die relativen Gelenkbewegungen werden entweder in Polarkoordinaten oder in einer projizierten 2-Ebenen-Gelenkwinkeldarstellung anschaulich ausgegeben. In der Polarkoordinatendarstellung ist die direkte Erfassung des absoluten Öffnungswinkels möglich. Gleichzeitig wird mit dem Positionswinkel angegeben, an welcher rotatorischen Position sich die jeweilige Gelenköffnung ergibt. Bei der 2-Ebenen-Darstellung wird die Stellung des ausgelegten Gelenkes relativ zur Ausgangsstellung

über zwei Projektionswinkel beschrieben. Damit wird ein Großteil der in der Industrie üblichen Darstellungsweisen für Gelenkwinkel abgedeckt (Bild 3).

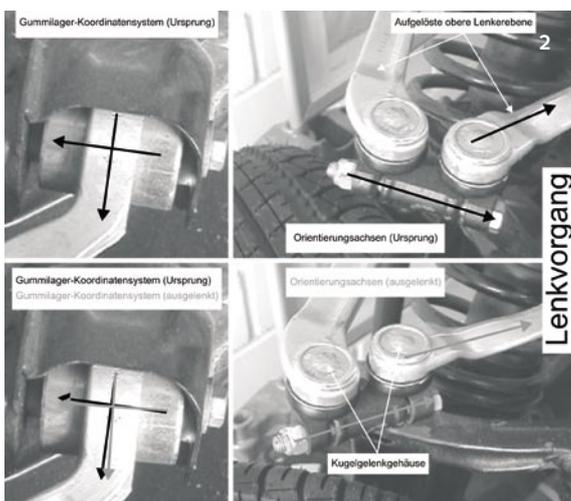
Weiterhin wird die Rotation des Gelenkes um die eigene Hauptachse (Eigenrotation) berechnet und dargestellt. Bei einem Kugelgelenk hat die Eigenrotation um die Gelenkzapfenachse Einfluss auf den Gelenkverschleiß. Bei einem Gummilager kann die Angabe dieses Gelenkwinkels darüber hinaus für die Berechnung des Rückstellverhaltens bzw. Rückstellmoments mit Kenntnis des Materialverhaltens weiterverwendet werden.

Ob in der Polarwinkeldarstellung oder in der 2-Ebenen-Projektion: Für jeden Bewegungszustand des Achssystems bzw. des Radträgers kann die jeweilige Gelenkstellung eindeutig abgelesen werden.

Bewegungsablauf der Radaufhängung: Um eine eindeutige Zuordnung der Gelenkwinkelergebnisse zum jeweiligen Bewegungszustand sowie die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, ist ein standardisierter Bewegungsablauf realisiert. Nach Eingabe von maximalem Einfederweg sowie maximaler Spurstangenauslenkung durch den Benutzer wird ein Bewegungsplan erzeugt, der sukzessive alle maximalen Stellungen anfährt. Die Feder kann maximal ein- oder ausgefedert ➤



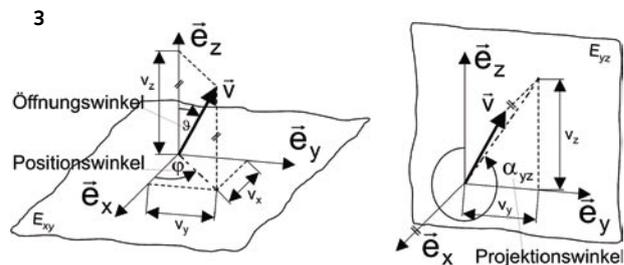
Dr.-Ing. Christoph Elbers, arbeitet bei der ZF Lemförder Fahrwerktechnik GmbH & Co. KG als Leiter Vorentwicklung Achsen.



Federweg am Feder-/Dämpferelement [mm]	Nachlaufwinkel [°]
Weg am Rad (vertikaler Radhub) [mm]	Nachlaufstrecke [mm]
(Vor-)Spurwinkel [°]	Nachlaufversatz [mm]
Spurstangenweg [mm]	Sprenzungswinkel [°]
Radlenkwinkel [°]	Lenkrollradius [mm]
Radsturzwinkel [°]	Sprenzungsversatz [mm]
Spurweite [mm]	Störkrafthebelarm Bremsen [mm]
Wankpol-Lage bei Hub- und Wankfedern [mm]	Störkrafthebelarm Antreiben [mm]
Optimaler Bremsabstützwinkel [°]	Radlenkwinkel innen [°]
Tatsächlicher Bremsabstützwinkel [°]	Radlenkwinkel außen [°]
Bremsnickausgleich [%]	Mittlerer Radlenkwinkel [°]
Optimaler Anfahrabstützwinkel [°]	Spurdifferenzwinkel [°]
Tatsächlicher Anfahrabstützwinkel [°]	Ackermann-Winkel (außen) [°]
Anfahrnickausgleich [%]	Ackermann-Anteil [%]
Schrägfederungswinkel [°]	Lenkradwinkel [°]
Federübersetzung (Federweg / Radhub) [-]	Lenkübersetzung [-]

Tabelle 1: Auszug aus der Liste der berechneten Kinematikennwerte in ABE

werden, die Spurstange maximal nach rechts und links bewegt werden. Zusammen mit der Ausgangsstellung und der Konstruktionslage ergeben sich neun verschiedene Endpositionen. Daraus



ergeben sich insgesamt zwölf Bewegungsbahnen, die durchfahren werden (Bild 4).

Damit werden auf effiziente Weise alle extremen kinematischen Gelenkzustände erfasst, die sich

über den gesamten Bewegungsbereich einer Radaufhängung ergeben können. So können bereits in der Vorentwicklung die notwendigen kinematischen Winkelbereiche der einzelnen Gelenke vordimensioniert werden. Die Farben der jeweiligen Bewegungsrichtungen sowie die Bezeichnungen der jeweiligen Eckpositionen im Bewegungsplan finden sich zur besseren Orientierung auch in den Ergebnisdarstellungen wieder (Bild 7).

des Zielsystems zu beschreiben, was der absoluten Auslenkung des zu beschreibenden Gelenkes entspricht.

Im vorliegenden Fall wird die Ausgangslage mit dem Index „1“ und die ausgelenkte Lage mit dem Index „2“ versehen.

Eine allgemeine Abbildungsmatrix \underline{A}^{12} rotiert das Koordinatensystem von der Ausgangslage „1“ in die Zielposition „2“:

$$\underline{KS}_2^{(1)} = \underline{A}^{12} \cdot \underline{KS}_1^{(1)} \quad (1)$$

Die Notation für Rotation, Abbildung und Koordinatentransformation ist [4] entnommen. $\underline{KS}_2^{(1)}$ bedeutet dabei, dass das Koordinatensystem mit der Nummer „2“ im lokalen, nicht inertialen Koordinatensystem „1“ per Koordinatentransformation dargestellt wird.

Soll das Zielkoordinatensystem „2“ auf das lokale Koordinatensystem „1“ bezogen werden, so gilt:

$$\underline{KS}_2^{(1)} = \underline{A}^{12} \cdot \underline{KS}_2^{(2)} \quad (2)$$

Mithilfe von \underline{A}^{12} kann man also nicht nur Vektoren oder Koordinatensysteme im Raum von einer Ausgangslage in eine Zielposition abbilden, sondern auch Vektoren oder Matrizen in verschiedenen Koordinatensystemen darstellen.

Die Matrix \underline{A}^{12} ist wie alle in diesem Algorithmus verwendeten Rotationsmatrizen orthonormal (orthogonal und normiert) und unterliegt dadurch der günstigen Eigenschaft, dass die inverse der transponierten Matrix entspricht:

$$\left(\underline{A}^{12}\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{12}\right)^T \quad (3)$$

Besetzung der Koordinatensysteme: Um die Bewegung der Gelenke berechnen zu können, müssen die körperfesten Koordinatensysteme der Gelenkkomponenten eindeutig festgelegt sein. Im Fall des fahrzeugseitigen Gummilagers wird die Orientierung der Gelenkhauptachse durch den Gelenkmittelpunkt sowie der Angabe eines zweiten Punktes auf der Hauptachse eindeutig festgelegt. Alternativ kann sich der Benutzer für die ersten Betrachtungsschritte einen Vorschlag zur Gelenkorientierung vorgeben lassen. Die Gelenkhauptachse wird gemäß gängiger Konvention als z-Achse betrachtet. Diese z-Achse sowie der Richtungsvektor des mit dem Gelenk verbundenen Lenkers spannen eine Ebene auf. Per Kreuzprodukt werden die x- und y-Achse des Ausgangssystems eindeutig festgelegt. Damit ist das Koordinatensystem \underline{B}_1 (Gummilagersystem) durch die Eingabe eines einzelnen Punktes auf der Gelenkhauptachse eindeutig festgelegt.

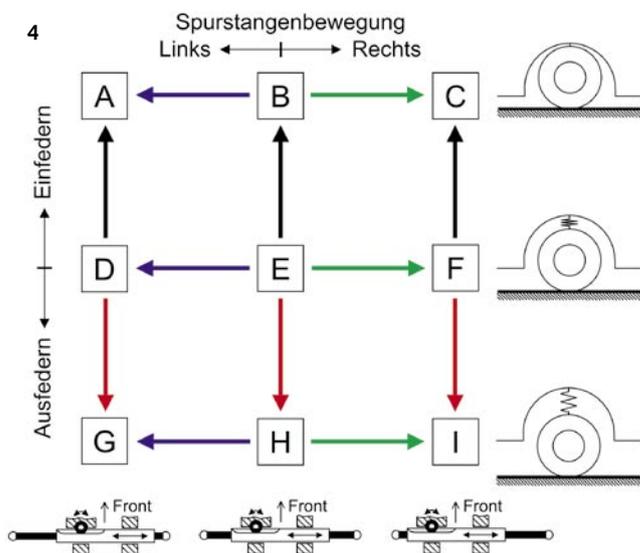
Für das Kugelgelenk gilt die gleiche Vorgehensweise: Der Benutzer legt neben dem Gelenkmittelpunkt einen zweiten Punkt auf der Gelenkzapfenachse (z-Achse) fest. Der Lenkervektor legt zusammen mit der z-Achse die Grundebene des Gelenkes fest und die einzelnen Ach-

Grundsätzliche Voraussetzungen der erforderlichen Rechenoperationen:

Um die genannten Gelenkwinkel in Polarkoordinaten und in kardianischen 2-Ebenen-Projektionen sowie die Eigenrotation zu berechnen, ist es notwendig, für die beiden relativ zueinander bewegten Gelenkkomponenten jeweils ein körperfestes Koordinatensystem festzulegen. Diese Koordinatensysteme werden sich bei einer Bewegung der Radaufhängung relativ zueinander bewegen. Von kinematischer Relevanz sind dabei nur die jeweiligen lokalen Rotationen und nicht die translatorischen Bewegungen.

Sind zwei Koordinatensysteme mit gleichem Ursprung im Inertialsystem bekannt, so lässt sich die Relativbewegung beider Systeme dadurch ermitteln, dass das ausgelenkte Koordinatensystem im Koordinatensystem des Ausgangszustandes dargestellt wird. Dann ist es möglich, beispielsweise die Auslenkung der z-Achse

- 3 Gelenkwinkel, Polariswinkel (links) sowie Projektionswinkel (beispielhaft)
- 4 Standardisierter Bewegungsplan zur Berechnung der Gelenkwinkel



sen des Koordinatensystems werden eindeutig bestimmt (**Bild 5**). Damit ist \underline{K}_1 (Kugelgelenksystem) ebenfalls festgelegt.

Beschreibung der relevanten Körperrotationen:

Wie beschrieben, durchläuft die Radaufhängung einen vorgegebenen Bewegungsplan. In jedem Schritt wird die Auslenkung der Gelenke relativ zum Ausgangszustand berechnet und dargestellt. Die Ausgangskoordinatensysteme sind festgelegt. Die Koordinaten der Hardpoints liegen aus dem ABE-Basisalgorithmus vor. Da der Kugelgelenkzapfen fest mit dem Radträger verschraubt ist, sind auch diese Koordinaten explizit bekannt.

Der jeweils betrachtete Lenkervektor ist sowohl in Ausgangs- als auch in Zielstellung aus dem ABE-Algorithmus bekannt. Das Kugelgelenkgehäuse sowie die Gummilageraußenhülle sind fest mit dem Lenker verbunden und erfahren daher die Gesamtrotation des Lenkers.

Für den hier dargestellten Fall ergeben sich Gelenkbewegungen, wie sie in **Bild 6** bei einer ebenen Einfederbewegung exemplarisch dargestellt werden.

Die Abbildung zeigt einen Querlenker, der aus seiner Konstruktionslage (schwarz) heraus durch eine Einfederbewegung der Radaufhängung nach oben in seine aktuelle Zielposition (weiß) gedreht wird. In dieser Abbildung ist nur eine ebene Drehung sichtbar. Das Gelenk wird im Allgemeinen überlagerte und räumliche Rotationen erfahren, die in diesem Algorithmus vollständig berechnet und als kardanische Gelenkbewegungen bezeichnet werden. Das Inertialsystem der Radaufhängung wird mit „0“ gekennzeichnet, das System „1“ bezeichnet die Ausgangsstellung der Gelenke. Mit „2“ bzw. „3“ werden die Zielsysteme beschrieben.

Man erkennt, dass das hier dargestellte Kugelgelenk mehrere Bewegungen erfährt. Zunächst wird das Gelenkgehäuse \underline{K}_1 mit der Gesamtrotation des Lenkers mitrotiert. Ohne relative Gelenkbewegung hätte das Kugelgelenk die hellgrau dargestellte Stellung \underline{K}_2 . Da der Gelenkzapfen aber im Radträger verschraubt ist, wird dieser in eine neue Zielposition (dunkelgrau, \underline{K}_3) bewegt, sodass die Relativbewegung des Kugelgelenks zwischen den beiden Stellungen \underline{K}_2 und \underline{K}_3 ermittelt wird.

Durch diese überlagerte Rotation muss das Bezugssystem des Kugelgelenkgehäuses zunächst mit der Gesamtrationsmatrix in die entsprechende Stellung \underline{K}_2 abgebildet werden:

$$\underline{K}_2^{(1)} = \underline{D}^{12} \cdot \underline{K}_1^{(1)} \quad (4)$$

Das System \underline{K}_3 beschreibt den ausgelenkten Kugelgelenkzapfen und wird durch den ABE-Basisalgorithmus bestimmt. \underline{K}_3 ist wie \underline{K}_2 nach der Gesamtrotation bekannt und wird nun zu $\underline{K}_3^{(2)}$ transformiert, um die relevante Gelenkbewegung relativ zu \underline{K}_2 zu bestimmen:

$$\underline{K}_3^{(2)} = \left(\underline{K}_2^{(0)}\right)^{-1} \cdot \underline{K}_3^{(0)} = \left(\underline{K}_2^{(0)}\right)^T \cdot \underline{K}_3^{(0)} \quad (5)$$

Das gummilagerfeste Koordinatensystem \underline{B}_2 muss als $\underline{B}_2^{(1)}$ dargestellt werden:

$$\underline{B}_2^{(1)} = \left(\underline{B}_1^{(0)}\right)^{-1} \cdot \underline{B}_2^{(0)} = \left(\underline{B}_1^{(0)}\right)^T \cdot \underline{B}_2^{(0)} \quad (6)$$

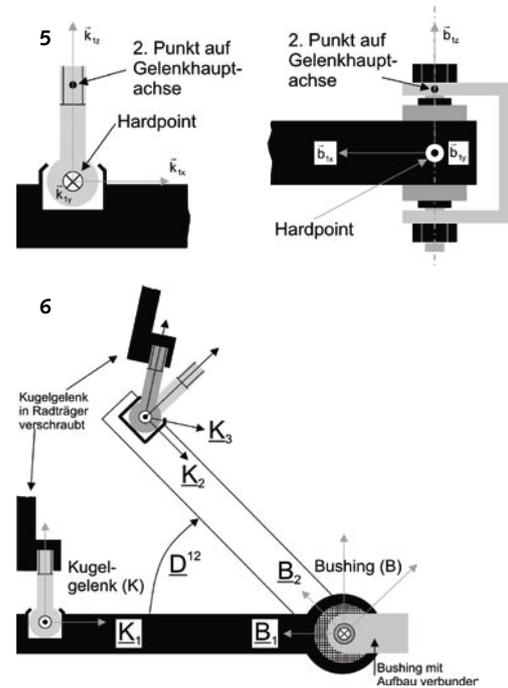
Man erkennt, dass für den jeweils betrachteten Lenker alle Matrizen außer der Abbildungsmatrix \underline{D}^{12} bekannt sind.

Lenkerbewegung bzw. -rotation: Es sind verschiedene Anordnungen der Lenker und Gelenke möglich. Bei der hier dargestellten Konfiguration mit Gummilager und Kugelgelenk sind zunächst zwei unterschiedliche Versionen denkbar. Falls zwei 2-Punkt-Lenker zu einem Dreiecklenker zusammengefasst sind, ist die Bewegung bei einer Feder- oder Lenkbewegung einfach beschreibbar: Die Momentanachse der Bewegung verläuft durch die beiden beteiligten aufbauseitigen Gummilager (Version 1). Durch die Angabe der Hardpoints ist diese Momentanachse direkt im globalen Koordinatensystem bekannt. Da der Dreiecklenker idealerweise keine Eigenrotation der beiden beteiligten Stäbe zulässt, ist die Rotation von der Ausgangs- in die Zielposition sehr einfach beschreibbar.

Bilden die beiden Lenker keinen Dreiecklenker, müssen sie einzeln betrachtet werden. Dadurch ist grundsätzlich neben der eigentlichen Bewegung in die Zielposition eine Eigenrotation des Lenkers möglich (Version 2). Die Eigenrotation beeinflusst maßgeblich die zu berechnenden Gelenkwinkel. Wird ein Lenker um seine eigene Achse gedreht, so ist diese Drehung ohne eine weitere überlagerte Bewegung direkt als Projektionswinkel α_{yz} bzw. als Öffnungswinkel ϑ der beteiligten Gelenke ablesbar.

Deshalb muss eine Abbildungsmatrix gefunden werden, die den Lenker derart aus der Ausgangsstellung in die ausgelenkte Stellung rotiert, dass die dazugehörige Eigenrotation sinnvoll ist und der Realität entspricht.

Da im hier betrachteten System ein Gummilager eingesetzt wird, wird eine entscheidende Eigenschaft ausgenutzt: Das Gummilager hat mehraxiale Federungseigenschaften und wird daher bei einer beliebigen Auslenkung ein Rückstellmoment liefern, welches das Gelenk in die ursprüngliche Stellung zurückzubewegen versucht. Daher wird in diesem Algorithmus die Annahme getroffen, dass die Eigenrotation des Lenkers genau so groß ist, dass ausgehend von der Grundstellung des Gelenkes die kleinstmögliche absolute Gummilagerauslenkung stattfindet. ➤



- 5 Festlegung der Gelenkorientierung durch Benutzereingabe
- 6 Ausgangs- und Zielstellung des betrachteten 2-Punkt-Lenkers

Bei anderen Lenker- und Gelenkkonfigurationen als den hier dargestellten stellt sich eine weitere Möglichkeit der Eigenrotation dar. Wenn die Strebe an beiden Seiten mit nicht einschränkenden Kugelgelenken montiert ist, ist die freie Bewegung der Strebe um die eigene Achse ohne kinematische Auswirkungen auf den Gesamtmechanismus der Radaufhängung möglich (Version 3). Dies ist bei gängigen Spurstangen der Fall. Um dennoch eine Aussage über die relativen Gelenkwinkel zu treffen, wird hier die Bedingung gesetzt, dass der verbindende Lenker bei der Gesamtbewegung keine Rotation um seine eigene Achse aufweist. Die damit entstehenden Gelenkwinkel sind daher als die minimal notwendigen Winkel für die beteiligten Gelenke anzusehen.

Im Berechnungsalgorithmus liegt der Ausgangsvektor des Lenkers als \vec{a}_1 vor. Wird die Radaufhängung in eine Position innerhalb des Bewegungsplans bewegt, so ist der Zielvektor dieses Lenkers als \vec{a}_2 bekannt. Gesucht wird die Abbildungsmatrix \underline{D}^{12} , mit der gilt:

$$\vec{a}_2^{(1)} = \underline{D}^{12} \cdot \vec{a}_1^{(1)} \quad (7)$$

mit

$$\vec{a}_1^{(1)} = (\underline{B}_1^{(0)})^{-1} \cdot \vec{a}_1^{(0)} = (\underline{B}_1^{(0)})^T \cdot \vec{a}_1^{(0)} \quad (8)$$

sowie

$$\vec{a}_2^{(1)} = (\underline{B}_1^{(0)})^{-1} \cdot \vec{a}_2^{(0)} = (\underline{B}_1^{(0)})^T \cdot \vec{a}_2^{(0)} \quad (9)$$

\underline{B}_1 ist bekannt, ebenso die Tatsache, dass \vec{a}_2 im neuen Koordinatensystem \underline{B}_2 die gleichen Koordinaten besitzt wie \vec{a}_1 in \underline{B}_1 :

$$\vec{a}_2^{(2)} = \vec{a}_1^{(1)} \quad (10)$$

Version 1: Dreiecklenkerkonfiguration

Für den Dreiecklenker mit den beiden bekannten aufbauseitigen Hardpoints (hier P_3 sowie P_5) kann die Abbildungsmatrix direkt aus den Matrizen der lenkerfesten Koordinatensysteme \underline{D}_{D1} in Grundstellung sowie \underline{D}_{D2} in Zielstellung gebildet werden:

$$\underline{D}^{12} = \underline{D}_{D2} \cdot \underline{D}_{D1}^{-1} \quad (11)$$

$$\underline{D}_{D1} = \{ \vec{d}_{1x}, \vec{d}_{1y}, \vec{d}_{1z} \} \quad (12)$$

Mit dem normierten Vektor

$$\vec{d}_{1z} = (\vec{p}_3 - \vec{p}_5)_n = \frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_5}{|\vec{p}_3 - \vec{p}_5|} \quad (13)$$

liegt die Momentanachse des Dreiecklenkers durch die beiden aufbauseitigen Gummilager fest. $\vec{a}_1^{(1)}$ und \vec{d}_{1z} spannen die Basisebene des Gummilagers auf, auf der \vec{d}_{1y} senkrecht steht:

$$\vec{d}_{1y} = (\vec{d}_{1z} \times \vec{a}_1^{(1)})_n \quad (14)$$

Schließlich ergibt sich \vec{d}_{1x} direkt zu

$$\vec{d}_{1x} = \vec{d}_{1y} \times \vec{d}_{1z} \quad (15)$$

Damit ist die Matrix \underline{D}_{D1} vollständig bekannt und orthonormal.

Unter der Voraussetzung, dass die Momentanachse aufbaufest ist, wird analog und in der gleichen Reihenfolge \underline{D}_{D2} besetzt:

$$\begin{aligned} \underline{D}_{D2} &= \{ \vec{d}_{2x}, \vec{d}_{2y}, \vec{d}_{2z} \} \\ &= \{ \vec{d}_{2y} \times \vec{d}_{1z}, (\vec{d}_{1z} \times \vec{a}_2^{(1)})_n, \vec{d}_{1z} \} \end{aligned} \quad (16)$$

Nur für den Fall, dass der Benutzer die Hauptachsen der beteiligten Gummilager in Richtung der Momentanachse \vec{d}_{1z} des Dreiecklenkers setzt, gilt:

$$\underline{D}_{D1} = \underline{B}_1^{(0)} \quad (17)$$

sowie

$$\underline{D}_{D2} = \underline{B}_2^{(0)} \quad (18)$$

Weichen die Hauptachsen von dieser Dreiecklenker-Momentanachse ab, werden die Gummilager kinematische Verzweigungen bei einer Bewegung der Radaufhängung erfahren. Dies kann bewusst eingesetzt oder aber bewusst vermieden werden.

Version 2: Freie Lenkerkonfiguration

Etwas umfangreicher zeigt sich die Berechnung der Abbildungsmatrix für Version 2. Zunächst wird das Koordinatensystem für das Gummilager in Ausgangsstellung beschrieben:

$$\underline{B}_1^{(0)} = \{ \vec{b}_{1x}, \vec{b}_{1y}, \vec{b}_{1z} \} \quad (19)$$

\vec{b}_{1z} wird durch die Lage des Gelenkmittelpunkts sowie der Benutzerangabe zum zweiten Punkt auf der Gelenkhauptachse festgelegt:

$$\vec{b}_{1z} = (\vec{p}_{HP} - \vec{p}_{axis})_n \quad (20)$$

Auch hier spannen der Lenkervektor und die Gelenkhauptachse die Gelenkgrundebene auf:

$$\vec{b}_{1y} = (\vec{b}_{1z} \times \vec{a}_1^{(1)})_n \quad (21)$$

Damit kann der letzte verbleibende Einheitsvektor berechnet werden:

$$\vec{b}_{1x} = \vec{b}_{1y} \times \vec{b}_{1z} \quad (22)$$

Die nun folgende Abbildungsrotation des Vektors $\vec{a}_1^{(1)}$ zu $\vec{a}_2^{(1)}$ wird ähnlich wie bei einer Euler-Rotation in mehrere Basisrotationen um jeweils eine Achse unterteilt, um die Matrizen eindeutig und zuverlässig beschreiben zu können.

Um zu gewährleisten, dass das Gummilager die kleinstmögliche Auslenkung erfährt, wird \vec{a}_1 zunächst um die z-Achse von \underline{B}_1 in eine Zwischenlage „P“ abgebildet. Diese Lage hat die Eigenschaft, dass \vec{b}_{1z} und der Zielvektor $\vec{a}_2^{(1)}$ die x-z-Ebene der Zwischenlage aufspannen.

Damit kann die erste Teilrotation (von „1“ nach „P“) beschrieben werden:

$$\underline{T}_1 = \{ \vec{t}_{1x}, \vec{t}_{1y}, \vec{t}_{1z} \} \quad (23)$$

Da um die z-Achse rotiert wird, gilt:

$$\vec{t}_{1z} = (0 \ 0 \ 1)^T \quad (24)$$

Aufgrund der o. g. Bedingung für die x-z-Ebene in „P“ gilt:

$$\vec{t}_{1y} = (\vec{t}_{1z} \times \vec{a}_2^{(1)})_n \quad (25)$$

Damit ergibt sich der letzte Einheitsvektor automatisch per Kreuzprodukt:

$$\vec{t}_{1x} = \vec{t}_{1y} \times \vec{t}_{1z} \quad (26)$$

Diese Rotationsmatrix bildet $\vec{a}_1^{(1)}$ in die Zwischenposition ab:

$$\vec{a}_p^{(1)} = \underline{T}_1 \cdot \vec{a}_1^{(1)} \quad (27)$$

Mit dieser Rotation liegen nun der Zwischenlagevektor $\vec{a}_p^{(1)}$ und der Zielvektor $\vec{a}_2^{(1)}$ in einer gemeinsamen Ebene, in der x-z-Ebene des Systems „P“. Die nächste Rotation findet daher um die y-Achse \vec{p}_y statt, um \vec{a}_p auf \vec{a}_2 korrekt abzubilden. Dazu werden zunächst beide Vektoren im System „P“ dargestellt:

$$\vec{a}_2^{(p)} = \underline{T}_1^{-1} \cdot \vec{a}_2^{(1)} \quad (28)$$

$$\vec{a}_p^{(p)} = \vec{a}_1^{(1)} \quad (29)$$

Diese Rotation ließe sich mithilfe einer Rotationsmatrix mit Winkelfunktionen direkt auflösen. Da solche Richtungskosinus aber unter Umständen nicht richtungseindeutig sind, wird aus Gründen der universellen Programmierung die Variante der Rotation mit Einheitsvektoren verwendet. Dazu wird \vec{a}_p zunächst mit \underline{T}_{21} auf eine Basisachse zurückrotiert, um anschließend von dieser Basisachse mit eindeutigen Einheitsvektoren und \underline{T}_{22} in die Zielposition gedreht zu werden:

$$\begin{aligned} \underline{T}_{21} &= \{ \vec{t}_{21x}, \vec{t}_{21y}, \vec{t}_{21z} \} \\ &= \{ \vec{a}_p^{(p)}, (0 \ 1 \ 0)^T, \vec{t}_{21x} \times \vec{t}_{21y} \} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \underline{T}_{22} &= \{ \vec{t}_{22x}, \vec{t}_{22y}, \vec{t}_{22z} \} \\ &= \{ \vec{a}_2^{(p)}, (0 \ 1 \ 0)^T, \vec{t}_{22x} \times \vec{t}_{22y} \} \end{aligned} \quad (31)$$

Die Gesamtabbildungsmatrix im System „P“ lautet demnach:

$$\underline{T}_2 = \underline{T}_{22} \cdot \underline{T}_{21}^{-1} = \underline{T}_{22} \cdot \underline{T}_{21}^T \quad (32)$$

Damit ist der Ausgangsvektor \vec{a}_1 schrittweise unter Berücksichtigung der notwendigen Eigenrotation des Lenkers in den Vektor \vec{a}_2 abgebildet worden, die Abbildungsmatrix ist also eindeutig festgelegt:

$$\vec{a}_2^{(1)} = \underline{D}^{12} \cdot \vec{a}_1^{(1)} = \underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2 \cdot \vec{a}_1^{(1)} \quad (33)$$

Version 3: Freie, nicht gefesselte Lenkerrotation

Für die Version 3 gilt, dass die Eigenrotation des Lenkers komplett unterbunden wird. Dafür wird die Abbildungsmatrix vom Ausgangszustand in den Zielzustand in Basisrotationen unterteilt. Wie erwähnt kann dies ähnlich zu Euler-Rotationen geschehen. Hier wird allerdings eine Rotation mit Bryant-Winkeln gewählt [4], die im Gegensatz z. B. zur häufig verwendeten Euler-x-Konvention (z,x,z- bzw. 3,1,3-Rotation) [5] eine Rotationsreihenfolge aufweist, die alle drei Raumachsen (x,y,z bzw. 1,2,3) betrifft. Damit ist es möglich, das aufbauseitige Koordinatensystem \underline{B}_1 zunächst so zu drehen, dass dem Lenkervektor eine lokale Raumachse zugewiesen wird, um dann eine solche Bryant-Rotation anzuwenden. Diejenige Rotationsmatrix, die um die Lenkerachse dreht, wird dann zur Einheitsmatrix gesetzt. So findet also nur eine zweimalige Basisrotation ohne Lenker-eigenrotation statt.

Ergebnisdarstellung: Wenn für die einzelnen Lenker die Abbildungsmatrix der Lenkerbewegung bekannt ist, können die relativen Gelenkbewegungen ermittelt werden (**Bild 3**).

Aus den Komponenten des Vektors, der die z-Achse beschreibt, kann man nun folgende Winkel ablesen: den Öffnungswinkel ϑ , den Positionswinkel φ sowie die projizierten Auslenkungswinkel α_{yz} und α_{zx} . Da die Länge des Vektors normiert ist, genügen jeweils die zwei Polarwinkelangaben oder die beiden Projektionswinkel zur vollständigen und eindeutigen Beschreibung der Gelenkstellung im Raum.

Die z-Achse sei beschrieben durch:

$$\vec{z} = (z_x \ z_y \ z_z)^T \quad (34)$$

Damit ergeben sich im weiteren folgende Winkelberechnungen:

Öffnungswinkel:

$$\vartheta = \arctan \frac{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}{z_z} \quad (35)$$

$$\varphi = [0, 180^\circ] \quad (36)$$

Positionswinkel:

$$\varphi = \arctan \frac{z_y}{z_x} \quad (37)$$

$$\varphi = [0, 360^\circ] \quad (38)$$

Projektionswinkel in der y-z-Ebene:

$$\alpha_{yz} = \arctan \frac{z_z}{z_y} \quad (39)$$

$$\alpha_{yz} = [0, 360^\circ] \quad (40)$$

Projektionswinkel in der z-x-Ebene:

$$\alpha_{zx} = \arctan \frac{z_x}{z_z} \quad (41)$$

$$\alpha_{zx} = [0, 360^\circ] \quad (42)$$

φ , α_{yz} und α_{zx} sind dabei abschnittsweise definiert. Wichtig für die Bewertung und Vergleichbarkeit der Ergebnisse ist die Definition des Winkelursprungs. Die Rotationsrichtung der Winkelangaben folgt den mathematisch positiven Richtungen des Koordinatensystems.

Ergebnisbeispiel und Beurteilung: Beispielhaft ist in **Bild 7** das Ergebnis einer Gelenkwinkelberechnung für ein radträgerseitiges Kugelgelenk einer Mehrlenkerachse dargestellt.

Die Bezeichnungen stammen aus dem Bewegungsplan, die vier unterschiedlichen Farben kennzeichnen die jeweilige Bewegungsrichtung der Radaufhängung. Auf dem linken Bild sind die Polarwinkel ϑ und φ dargestellt, auf dem rechten Bild die beiden projizierten Gelenkwinkel α_{yz} und α_{zx} . Aus diesen Diagrammen können dem Komponentenentwickler wichtige Ergebnisse wie z. B. die maximale absolute Auslenkung des Gelenkes (hier: Punkt C) oder die Form der Gelenköffnungs-

blende mitgeteilt werden. Ein weiteres Ergebnisdiagramm zur Rotation des Gelenkes um die eigene Hauptachse liefert weitere, wichtige Erkenntnisse.

Weiterhin kann die Darstellung der über einen kompletten Bewegungsplan entstehenden Gelenkwinkel Aufschluss darüber geben, ob das jeweilige Gelenk in der Konstruktionslage vorgewinkelt werden muss, um eine optimierte und effizientere Gelenkbewegung zu realisieren. Verschleißminimierte oder kinematisch günstigere Gelenkbewegungen sind die Folge.

Mit dem hier beschriebenen Ansatz zur Berechnung und Darstellung von Gelenkwinkeln im Fahrwerk ist es dem Entwickler möglich, bereits im Vorentwicklungsprozess auf elegante und effiziente Weise wichtige Informationen für den weiteren Entwicklungsprozess der Fahrwerkelenke zu liefern. ◀◀

Literaturverzeichnis:

- [1] Matschinsky, W.: *Radführungen der Straßenfahrzeuge*. Berlin: Springer, 1998
- [2] Matschinsky, W.: *Bestimmung mechanischer Kenngrößen von Radaufhängungen*. Hannover, Universität Hannover, Diss., 1992
- [3] Albers, I.: *Erstellung eines Berechnungstools zur starkkinematischen Analyse von Einzelradaufhängungen*. Aachen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Dipl.-Arb., 2003
- [4] Wittenburg, J.: *Dynamics of systems of rigid bodies*. Stuttgart: Teubner, 1977
- [5] Weisstein, E.W.: Euler Angles. In: *Wolfram Mathworld* [online]. Champaign (Illinois): Wolfram Research, Inc., 1999. Internet: <<http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>>

7 Ergebnisse in Polarwinkeln (links) sowie in 2-Ebenen-Projektionswinkeln

