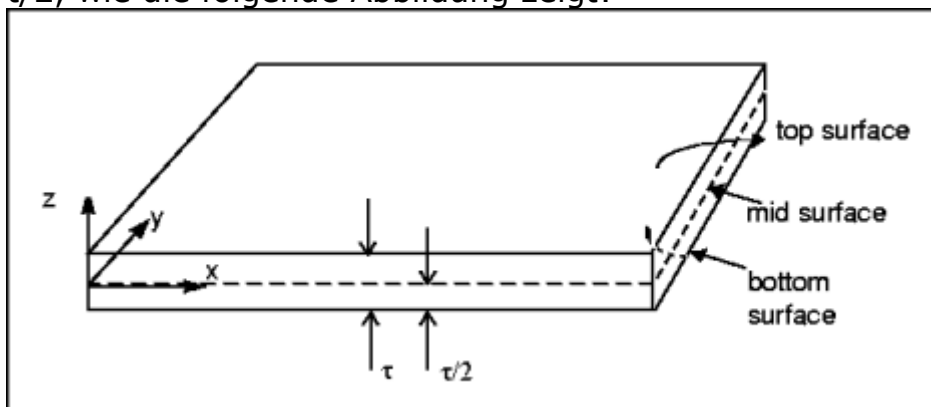


# Formeln für die Berechnung von Schaleneigenschaften

Eine Schale ist ein Teilstück eines Creo Simulate Modells, das sehr dünn, zugleich aber lang und breit ist. Aus Gründen der effizienteren Berechnung empfiehlt es sich, dünne Bereiche einer Struktur als Schalen zu modellieren. Die Effizienz gründet sich zum Teil auf allgemeine Annahmen über das Verhalten von Schalen. In anderen Worten: Das mechanische Verhalten einer Schale lässt sich näherungsweise durch eine Beschreibung des mechanischen Verhaltens ihrer Mittenfläche ausdrücken.

Es ist also möglich, die Verschiebung einer Schale über die Rotation und Verschiebung ihrer Mittenfläche, die Dehnung einer Schale über die Dehnung und Krümmungsänderung ihrer Mittenfläche und das Gleichgewicht einer Schale über das Gleichgewicht der Spannungen zu beschreiben, die sich aus der Dicke der Schale ergeben.

Die folgende Abbildung zeigt eine flache rechteckige Schale, deren Kanten an der x- und y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems ausgerichtet sind. Die XY-Ebene dieses Koordinatensystems befindet sich in der Mitte zwischen der oberen und der unteren Fläche der Schale; daher liegt die Mittenfläche der Schale bei  $z=0$ . Da die Schale die Dicke  $t$  aufweist, liegt die obere Fläche bei  $z = t/2$  und die untere Fläche bei  $z = -t/2$ , wie die folgende Abbildung zeigt:



Wie bereits erwähnt gilt die Annahme, dass die Verschiebung eines beliebigen Punktes  $(x, y, z)$  innerhalb der Schale als Verschiebung und Rotation des Punktes  $(x, y, 0)$  auf der Mittenfläche der Schale ausgedrückt werden kann. Speziell gilt die Annahme, dass:

$$u_x(x, y, z) = u_x^0(x, y) + z \beta_x(x, y),$$

$$u_y(x, y, z) = u_y^0(x, y) - z \beta_x(x, y), \text{ and} \quad (\text{A.1})$$

$$u_z(x, y, z) = u_z^0(x, y).$$

Dabei gilt:

- $u_x, u_y, u_z$  sind die Komponenten der Verschiebung in x-, y- bzw. z-Richtung
- $u_x^0, u_y^0, u_z^0$  sind die Komponenten der Verschiebung der Mittenfläche
- $\beta_x, \beta_y$  sind die (geringfügigen) Rotationen der Mittenfläche um die x- bzw. y-Achse

In ähnlicher Weise können die Dehnungskomponenten  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  und  $\epsilon_{xy}$  eines beliebigen Punktes  $(x, y, z)$  wie folgt als Dehnungen ( $\epsilon^0_{xx}$ ,  $\epsilon^0_{yy}$ ,  $\epsilon^0_{xy}$ ) und Krümmungsänderungen ( $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\kappa_{xy}$ ) der Mittenfläche (oder Membran) ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(x, y, z) &= \epsilon^0_{xx}(x, y) + z \kappa_{xx}(x, y), \\ \epsilon_{yy}(x, y, z) &= \epsilon^0_{yy}(x, y) + z \kappa_{yy}(x, y), \\ \epsilon_{xy}(x, y, z) &= \epsilon^0_{xy}(x, y) + z \kappa_{xy}(x, y).\end{aligned}\tag{A.2}$$

Beachten Sie, dass die Gleichung (A.2) die Schubdehnungskomponenten des Tensors ( $\epsilon_{xy}$  und  $\epsilon^0_{xy}$ ) und nicht die maschinenbaulichen Schubdehnungskomponenten enthält, deren Werte doppelt so hoch sind wie die Werte des Tensors.

Für flache Schalen gelten folgende Tensor-Schubdehnungskomponenten:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0_{xx} \\ \epsilon^0_{yy} \\ \epsilon^0_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u^0_y}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^0_x}{\partial y} + \frac{\partial u^0_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}\tag{A.2a}$$

und

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} - \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}\tag{A.2b}$$

Die Kräfte der Schalenresultierenden ( $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$ ), die Momente der Schalenresultierenden ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$ ) und die Schalenquerschubkräfte ( $Q_x$ ,  $Q_y$ ) werden ermittelt, indem die Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  über die Dicke der Schale einbezogen werden. Die Kräfte der Schalenresultierenden sind gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz\tag{A.3}$$

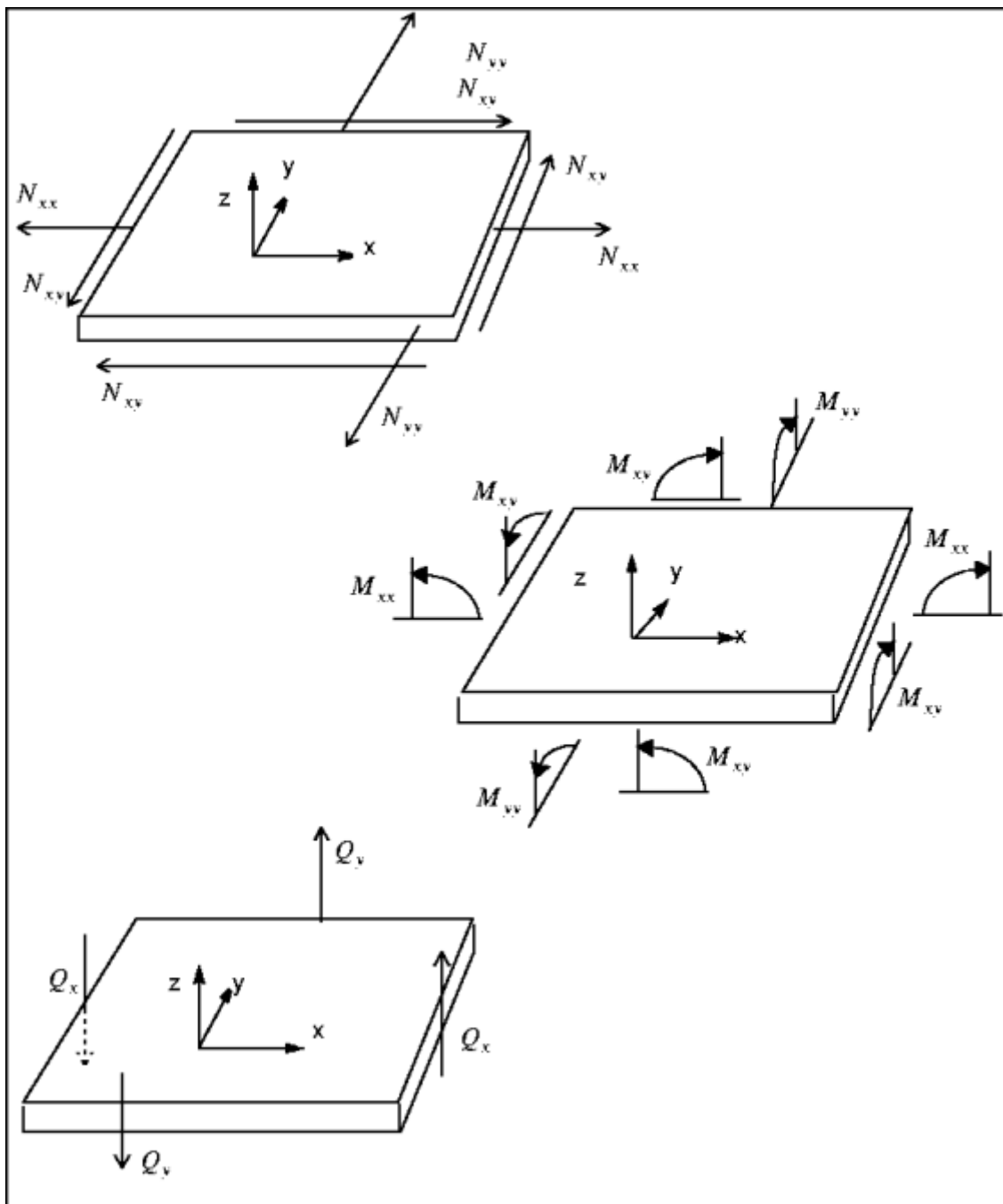
Die Momente der Schalenresultierenden sind gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (\text{A.4})$$

Die Schalenquerschubkräfte sind gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A.5})$$

Die folgende Abbildung zeigt die Vorzeichenkonventionen, die in Mechanica für resultierende Kräfte, resultierende Momente und Querschubkräfte verwendet werden. Beachten Sie, dass ein positives Moment ( $M_{xx}$ ) in der oberen Schalenhälfte ( $z > 0$ ) eine positive Dehnung ( $\epsilon_{xx}$ ), in der unteren Schalenhälfte ( $z < 0$ ) dagegen eine negative Dehnung bewirkt.



Die Beziehungen zwischen den Schalenresultierenden und den Dehnungen und Krümmungsänderungen der Mittenfläche sind gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ 2\varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \\ M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

und

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz}^0 \\ 2\varepsilon_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

In Gleichung (A.6) werden die Größen  $A_{ij}$  (wobei  $i, j = 1, 2, 6$ ) als Dehnsteifigkeiten, die Größen  $D_{ij}$  als Biegesteifigkeiten, die Größen  $B_{ij}$  als Dehnbiegungs-Kopplungssteifigkeiten und die Größen  $A_{kl}$  (wobei  $k, l = 4, 5$ ) als Querschubsteifigkeiten bezeichnet. Die Größen  $\varepsilon_{xz}^0$  und  $\varepsilon_{yz}^0$  sind die Querschubdehnungen auf der Mittenfläche. Die Größen  $N_{ij}^T$  und  $M_{ij}^T$  sind die resultierenden Wärmekräfte bzw. -momente.

Die in den Gleichungen (A.6) und (A.7) eingeführten Schalensteifigkeiten und Wärmeresultierenden sind durch Einbinden der Materialeigenschaften der Schale über die Dicke der Schale definiert. Die Dehnsteifigkeit, die Biegesteifigkeit und die Dehnbiegungssteifigkeit sind gegeben durch:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Q_{ij} dz \quad ij = 1, 2, 6 \quad (\text{A.8})$$

und:

$$B_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Q_{ij} z dz \quad ij = 1, 2, 6 \quad (\text{A.9})$$

und

$$D_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Q_{ij} z^2 dz \quad (ij = 1, 2, 6) \quad (\text{A.10})$$

Dabei sind  $Q_{ij}$  die reduzierten Steifigkeiten des Materials.

Die Querschubsteifigkeit ist gegeben durch:

$$A_{kl} = K_k K_l \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} C_{kl} dz \quad k, l = 4, 5 \quad (\text{A.11})$$

Dabei gilt:

- $C_{kl}$  sind die (nicht reduzierten) Steifigkeiten des Materials, und
- $K_4, K_5$  sind die Koeffizienten der Schubkorrektur, die bei homogenen Schalen oft als  $K_4 = K_5 = \sqrt{5/6}$  angenommen werden.

Beachten Sie, dass das Integral in Gleichung (A.9) verschwindet und die Dehnbiegungs-Kopplungssteifigkeiten  $B_{ij}$  gleich Null sind, wenn das Material der Schale symmetrisch über die Mittenfläche verteilt ist.

Die resultierenden Wärmekräfte und -momente sind gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} N^T_{xx} \\ N^T_{yy} \\ N^T_{xy} \end{Bmatrix} = - \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T dz \quad (\text{A.12})$$

und

$$\begin{Bmatrix} M^T_{xx} \\ M^T_{yy} \\ M^T_{xy} \end{Bmatrix} = - \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T z dz \quad (\text{A.13})$$

Dabei gilt:

- $\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{xy}$  sind die Wärmeausdehnungskoeffizienten des Materials, und
- $\Delta T$  ist die Temperaturänderung gegenüber dem spannungsfreien Zustand. Verläuft die Temperaturänderung gleichmäßig durch die gesamte Dicke der Schale, können die Größen  $\Delta T$  aus den Gleichungen (A.12) und (A.13) entfernt werden. Es ergeben sich die Gleichungen (A.14) und (A.15):

$$\begin{Bmatrix} N^T_{xx} \\ N^T_{yy} \\ N^T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^*_{xx} \\ N^*_{yy} \\ N^*_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{Bmatrix} M^T_{xx} \\ M^T_{yy} \\ M^T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M^*_{xx} \\ M^*_{yy} \\ M^*_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \quad (\text{A.15})$$

$N^*_{xx}, N^*_{yy}, N^*_{xy}, M^*_{xx}, M^*_{yy}, M^*_{xy}$  bezeichnet man als Wärmekoeffizienten der Schalenresultierenden. Sie sind gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} N^*_{xx} \\ N^*_{yy} \\ N^*_{xy} \end{Bmatrix} = - \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{Bmatrix} M^*_{xx} \\ M^*_{yy} \\ M^*_{xy} \end{Bmatrix} = - \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (\text{A.17})$$

Auch die Masseneigenschaften für Schalen werden durch Einbinden der Materialeigenschaftsdaten über die Dicke der Schale ermittelt. Die Masse pro Flächeneinheit ( $\rho_0$ ) ist gegeben durch:

$$\rho_0 = \int_{-t/2}^{t/2} \rho dz \quad (\text{A.18})$$

Dabei ist  $\rho$  die Dichte des Materials.

Die Rotationsträgheit pro Flächeneinheit ( $\rho_2$ ) ist gegeben durch:

$$\rho_2 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \rho z^2 dz. \quad (\text{A.19})$$