2.6 Auftrieb und Schwimmen

2.6.1 Auftrieb

Die Kraft, die ein Fluid auf einen eingetauchten Körper ausübt, wird exakt als (fluid-)statischer Auftrieb, kurz jedoch nur als Auftrieb bezeichnet und ist nach ARCHIMEDES[1] so groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Fluidvolumens (Uminterpretation!).

Der ARCHIMEDES-Auftrieb – bedingt durch den Druckunterschied von Unter- und Oberseite des Körpers – wird demnach durch die Schwerewirkung des Fluides verursacht und ist deshalb mittels des hydrostatischen Grundgesetzes herleitbar (Aufkraft minus Abkraft).

Auf das infinitesimale Scheibchen in Bild 2-34 mit Querschnitt $\mathrm{d}A$ wirken vertikal von oben die Abkraft $\mathrm{d}F_{1,z}$ und von unten die Aufkraft $\mathrm{d}F_{2,z}$.

Hieraus folgt der Auftrieb $\mathrm{d}F_a$ als resultierende Vertikalkraft $\mathrm{d}F_z$ auf das Körpervolumen $\mathrm{d}V$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_a = \mathrm{d}F_z &= \mathrm{d}F_{2,z} - \mathrm{d}F_{1,z} \\ &= \mathrm{d}F_2 \cdot \cos\alpha_2 - \mathrm{d}F_1 \cos\alpha_1 \end{aligned}$$

Hierbei gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_z = p \cdot \mathrm{d}A &= (p_ü + p_b) \cdot \mathrm{d}A \\ &= (\varrho \cdot g \cdot t + p_b) \cdot \mathrm{d}A \end{aligned}$$

Eingesetzt für Stellen 1 und 2, ergibt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_a = &(\varrho \cdot g \cdot t_2 + p_b) \cdot \mathrm{d}A_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ &- (\varrho \cdot g \cdot t_1 + p_b) \cdot \mathrm{d}A_1 \cdot \cos\alpha_1 \end{aligned}$$

[1] ARCHIMEDES (287 bis 212 v. Chr.), griech. Mathematiker. Heureka ... ich hab's (gefunden); Ausruf von ARCHIMEDES bei der Entdeckung des Auftriebs.

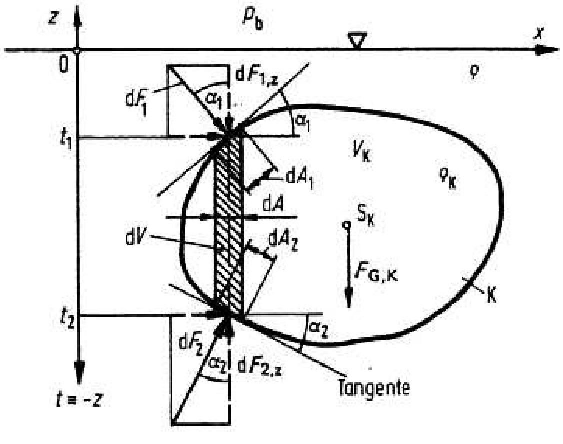

Bild 2-34. Auftrieb auf den Körper K.

Mit $dA_2 \cdot \cos\alpha_2 = dA_1 \cdot \cos\alpha_1 = dA$ wird:

$$dF_a = (p_2 - p_1) \cdot dA.$$

$$dF_a = \varrho \cdot g \cdot (t_2 - t_1) \cdot dA = \varrho \cdot g \cdot dV_K \qquad \text{und}$$

$$F_a = \int_{(V_K)} dF_a = \varrho \cdot g \cdot \int_{(V_K)} dV_K$$

$$\boldsymbol{F_a = \varrho \cdot g \cdot V_K} \tag{2-76}$$

Es ergibt sich das Gesetz von ARCHIMEDES.

Der (fluid)statische Auftrieb oder auch **ARCHIMEDESauftrieb** ist nach Gl. (2-76) nur von der Fluiddichte und dem Körpervolumen abhängig, nicht jedoch von der Tiefe, in der sich der Körper im Fluid befindet, wenn von der Änderung der Fluiddichte infolge Kompressibilität abgesehen wird.

Bemerkungen:

1. Der Körper dreht sich solange, bis die Auftriebskraft im Körperschwerpunkt angreift, d. h. die Integrale der Kräfte in der waagrechten Ebene (x- und y-Koordinaten) über die Körperoberfläche verschwinden.
2. Bei vollständig in Fluid eingetauchten Körpern mit der Gewichtskraft F_G wird unterschieden:
   $F_G = F_a$ Körper schwebt (Gleichgewicht)
   $F_G > F_a$ Körper sinkt ab
   $F_G < F_a$ Körper steigt auf
3. Sitzt ein Körper entsprechend Bild 2-35 so exakt auf dem Gefäßboden auf, daß kein Fluid zwischen Körperunterfläche und Behälterbodenfläche dringen kann, auch nicht in molekularer Schichtdicke, was meist unerreichbar, ist keine Aufkraft und somit auch kein Auftrieb vorhanden. Der Körper wird dann mit der von oben wirkenden Abkraft auf den Gefäßboden gedrückt. Diese Bodenkraft ist, wie abgeleitet, gleich der Gewichtskraft des auf dem Körper ruhenden Fluidvolumens. Diese Erscheinung kann in der Technik z. B. am Aneinanderhaften von Endmaßen (Meßklötzchen) beobachtet werden. Der Effekt wird durch Adhäsion verstärkt.
4. Bei sich nicht mischenden Fluiden verdrängt das schwerere infolge Auftriebswirkung das leichtere nach oben (Abschnitt 2.2.8.1). In homogenem Fluid oder Fluidgemisch (Dispersion) (ohne eingetauchten Stoff) sind Auftrieb und Verdrängung daher nicht vorhanden, bzw. Auftrieb und Adhäsion gleichen sich aus.

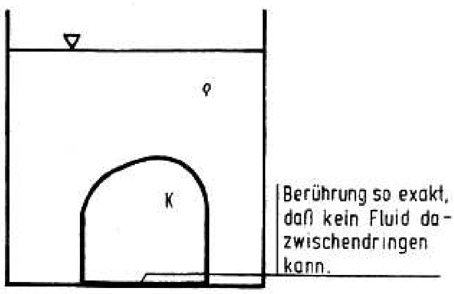

Bild 2-35. Körper K ohne Auftrieb.

Nur in völlig erschütterungsfreiem Zustand ist, wie erwähnt, ein Aufbau möglich, bei dem das schwerere über dem leichteren Fluid geschichtet ruht (labiler Gleichgewichtszustand). Hier handelt es sich um einen theoretischen Fall, der praktisch nicht zu verwirklichen ist. Bei der geringsten störungsbedingten Einbeulung der Trennfläche zwischen den zwei Flüssigkeitsschichten ergeben sich lokal unterschiedliche fluidstatische Drücke, wodurch das System instabil wird und sich dadurch in Bewegung setzt. Diese hält so lange an, bis sich die Fluidschichtung vollständig umgekehrt hat, also das schwerere Fluid sich unten und das leichtere oben befindet, wodurch dann der stabile Gleichgewichtszustand erreicht ist.

2.6.2 Schwimmen

2.6.2.1 Gleichgewicht

Ein Körper (homogen oder inhomogen) kann nur schwimmen, wenn die auf sein äußeres Gesamtvolumen bezogene Dichte kleiner ist, als die des Fluides, in das er eintaucht. Der Körper taucht so weit in das Fluid ein, bis das von ihm verdrängte Flüssigkeitsgewicht $\varrho \cdot g \cdot V_K$ gerade so groß ist, wie seine Gewichtskraft F_G.

Deshalb gilt:
Gleichgewichtsbedingung für Schwimmen (Schwimmbedingung):

$$F_a = F_G$$

2.6.2.2 Stabilität

Wie allgemein in der Mechanik, wird auch beim Schwimmen zwischen drei Stabilitätsfällen unterschieden, Bild 2-36.

a) stabile Schwimmlage
b) labile Schwimmlage
c) indifferente Schwimmlage

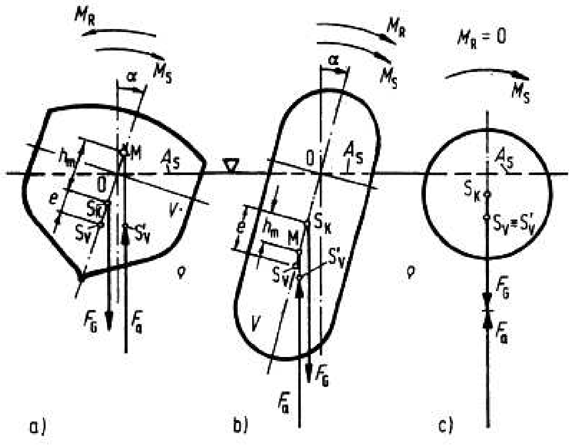

Bild 2-36. Stabilitätsfälle: a) stabil, b) labil, c) indifferent.

In Bild 2-36 bedeuten:

- A_S Schwimmfläche. Das ist die Körperquerschnittsfläche in der Spiegelflächen-Ebene.
- α Auslenkungswinkel aus der stabilen Schwimmlage.
- 0 Drehachse des Körpers, liegt in der Schwimmfläche und geht durch deren Schwerpunktslinie.
- S_K Körperschwerpunkt; unabhängig von α.
- S_V Schwerpunkt der verdrängten Fluidmenge vor der Drehung um α, also bei $\alpha = 0$.
- S_V' Schwerpunkt der verdrängten Fluidmenge nach der Auslenkung um $\alpha \to S_V' = f(\alpha)$.
- V Vom Körper verdrängtes Fluidvolumen, unabhängig von α (Schwimmbedingung).
- M Metazentrum, Schnittpunkt der Wirkungslinie von F_a mit der Körpersymmetrieachse.
- h_m metazentrische Höhe.
- e Exzentrizität; Abstand zwischen S_K und S_V.

Bei vielen praktischen Fällen, z. B. Schiffen, ist stabile Schwimmlage von grundlegender Bedeutung. Stabiles Schwimmverhalten ist gegeben, wenn der Schwimmkörper nach Wegfallen störender Kräfte bzw. Momente wieder in seine Ausgangslage, die Gleichgewichtslage, zurückstrebt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für stabiles Schwimmverhalten bei Auslenkungswinkel α bis ungefähr 12° ergibt folgende Ableitung:

Mit den in Bild 2-37 eingezeichneten Volumenelementen gilt:

$$\mathrm{d}F_a = \mathrm{d}V \cdot \varrho \cdot g = \mathrm{d}A \cdot z \cdot \varrho \cdot g$$

Mit $\quad z = x \cdot \hat{\alpha}$ für $\alpha° < 12°$

also $\hat{\alpha} < 0{,}21$ (Bogenmaß!)

wird $\mathrm{d}F_a = \varrho \cdot g \cdot \hat{\alpha} \cdot x \cdot \mathrm{d}A$

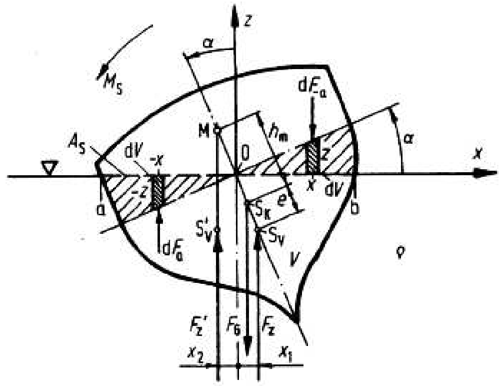

Bild 2-37. Stabiles Schwimmverhalten.

Das Moment des Auftriebes nach Auslenkung um Winkel α läßt sich wie folgt zusammensetzen: Wirkung der Auftriebskraft am ursprünglichen Angriffspunkt S_V vor der Auslenkung ($\alpha = 0$) zuzüglich des Einflusses des infolge Auslenkung zusätzlich verdrängten Flüssigkeitskörpers abzüglich der Momentwirkung des ausgetauchten Körpervolumens (eingeführt als negative Auftriebswirkung):

$$M_A = F_z \cdot x_1 - \int_a^0 x \cdot \mathrm{d}F_a - \int_0^b x \cdot \mathrm{d}F_{-a}$$

Wenn stabiles Schwimmverhalten ($h_m > 0$) erreicht werden soll, muß dieses Moment einem Rückdrehmoment $F_z' \cdot x_2$ (negative Drehrichtung) identisch sein. $F_z' \cdot x_2$ ist das tatsächlich vorhandene Rückstellmoment der Auftriebskraft $F_z' = F_z$, wirkend im Schwerpunkt S_V' des verdrängten Flüssigkeitskörpers nach der Auslenkung:

$$-F_z' \cdot x_2 = F_z \cdot x_1 - \int_a^0 x \cdot \mathrm{d}F_a - \int_0^b x \cdot \mathrm{d}F_{-a}$$

Dabei sind: $F_z' = F_z = \varrho \cdot g \cdot V$

$$\mathrm{d}F_{-a} = \mathrm{d}F_a = \varrho \cdot g \cdot \hat{\alpha} \cdot x \cdot \mathrm{d}A$$

Eingesetzt und nach Zusammenfassen der Integrale ergibt sich:

$$V \cdot \varrho \cdot g(x_1 + x_2) = \varrho \cdot g \cdot \hat{\alpha} \cdot \int_0^b x^2 \,\mathrm{d}A$$

Mit $\quad x_1 + x_2 = \hat{\alpha} \cdot (h_m + e)$

und $\quad I_S = \int_0^b x^2 \cdot \mathrm{d}A$

wird $\quad h_m = \dfrac{I_S}{V} - e \qquad (2\text{-}77)$

I_S ist das Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche A_S bezüglich der Drehachse 0 und daher abhängig von der Auslenkung α, also $I_S = f(\alpha)$. Stabiles Schwimmverhalten ist nach der durchgeführten Herleitung nur dann gegeben, wenn das bei der Auslenkung um α auftretende Moment M_A ein Rückstellmoment ist, dadurch gekennzeichnet, daß das Metazentrum M oberhalb 0 liegt ($h_m > 0$). Dies muß immer der Fall sein, auch bei der ungünstigsten Stellung mit $I_{S,\,min}$. Hieraus folgt die **allgemeine Stabilitätsbedingung:**

$$\frac{I_{S,\,min}}{V} - e > 0 \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{\frac{I_{S,\,min}}{V} > e} \tag{2-78}$$

Je nach Schiffstyp liegt die metazentrische Höhe h_m bei Hochseeschiffen zwischen 0,4 und 1,2 m.

Quelle:
H. Sigloch – Technische Fluidmechanik