Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Dipl.-Ing. Dipl.-Inform. Rainer Nolte, Nolte NC-Kurventechnik GmbH, Bielefeld

Ein wichtiger Aspekt bei der Entwicklung leistungsfähiger Verarbeitungsmaschinen ist die dynamisch günstige Gestaltung ihrer Bewegungsabläufe.

Ziel des Bewegungsdesign-Prozesses ist in der Regel, möglichst hohe Spitzen-Taktzahlen zu erreichen, oder alternativ möglichst geringen Verschleiß und möglichst geringe Ausfallzeiten bei festgelegten Nenn-Taktzahlen.

Beim Gestalten der Bewegungen sind vielfältige Kriterien gegeneinander abzuwägen:

- Kollisionsreserven konkurrierender Bewegungen
- sachgerechte Behandlung des verarbeiteten Produkts
- zulässige Geschwindigkeiten und Beschleunigungen an Maschinenelementen
- zulässige Drehzahlen, Spitzenmomente und Effektivmomente von Servomotoren und Getrieben
- Übertragungswinkel, Krümmungsradius und Hertzsche Pressung an Kurvenbahnen
- Lebensdauer von Kurvenrollen und Kurvenflanken
- Verlustleistung bzw. Energieverbrauch
- Weichheit der Verläufe von Beschleunigung und Antriebsmoment
- Neigung zur Schwingungsanregung
- Nichtlinearitäten der bewegten Mechanik

Sehr verbreitet als Grundlage für die Festlegung von Bewegungen ist die VDI-Richtlinie 2143 (Weißdruck Oktober 1980). Sie stellt Formeln für die abschnittsweise Berechnung meist ruckfreier Weg-Zeit-Verläufe für elektronische und mechanische Kurven zur Verfügung. Viele Ingenieure in der Praxis berufen sich bei der Festlegung von Bewegungsplänen auf diese erfolgreiche Richtlinie.

Da die Richtlinie die Bewegungsgesetze katalogartig zusammenstellt, könnte der Eindruck entstehen, daß allein die Auswahl des „richtigen“ Bewegungsgesetzes aus diesem Katalog ein optimales Bewegungsverhalten der Maschine garantiert. In der Tat werden sehr häufig die ruckfreien Rast-in-Rast-Bewegungsgesetze „Polynom 5. Ordnung“, „Modifizierte Sinuslinie“, „Geneigte Sinuslinie“ oder „Modifiziertes Beschleunigungstrapez“ für Kurven und Servo-Sollbewegungen vorgeschrieben.

Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Dies ist aber eine zu starke Vereinfachung des Bewegungsdesign-Prozesses. Um das dynamische Potential einer Mechanik voll auszunutzen, kommt es darauf an, die Abtriebsbewegungen als optimalen Kompromiß der oben genannten und auf alle Teilmechanismen gleichzeitig bezogenen Kriterien zu gestalten. Die detailgenaue Gestaltung der Bewegungsabschnitte im Gesamt-Bewegungsdiagramm geht immer aus den Bewegungsanforderungen und den verschiedenen dynamischen Grenzen der Maschine hervor.

Die Bewegungsgesetze der VDI-Richtlinie 2143 sind heute eher als grundlegende Beispiele für Bewegungsgestaltungen zu verstehen, oder als didaktische Hilfen, um die Wirkung von Maßnahmen zur Bewegungsgestaltung zu verstehen.

Wichtig beim Bewegungsdesign ist das Bewußtsein, daß man Bewegungsverläufe grundsätzlich in ihrer Gänze im Detail frei festlegen kann, um die Mechanik dynamisch optimal auszunutzen.
Werden Bewegungsdiagramme in sachgerechter Weise vollständig frei gestaltet, werden die Maschinen auch schneller bzw. besser laufen, als wenn man nur Bewegungsgesetze aus einem Katalog auswählte.

Unmittelbar ergibt sich daraus das Problem, daß man für das Gestalten der Bewegungen geeignete Beschreibungsmittel benötigt, damit man seine Vorstellungen von den idealen Bewegungsverläufen auch umsetzen kann.

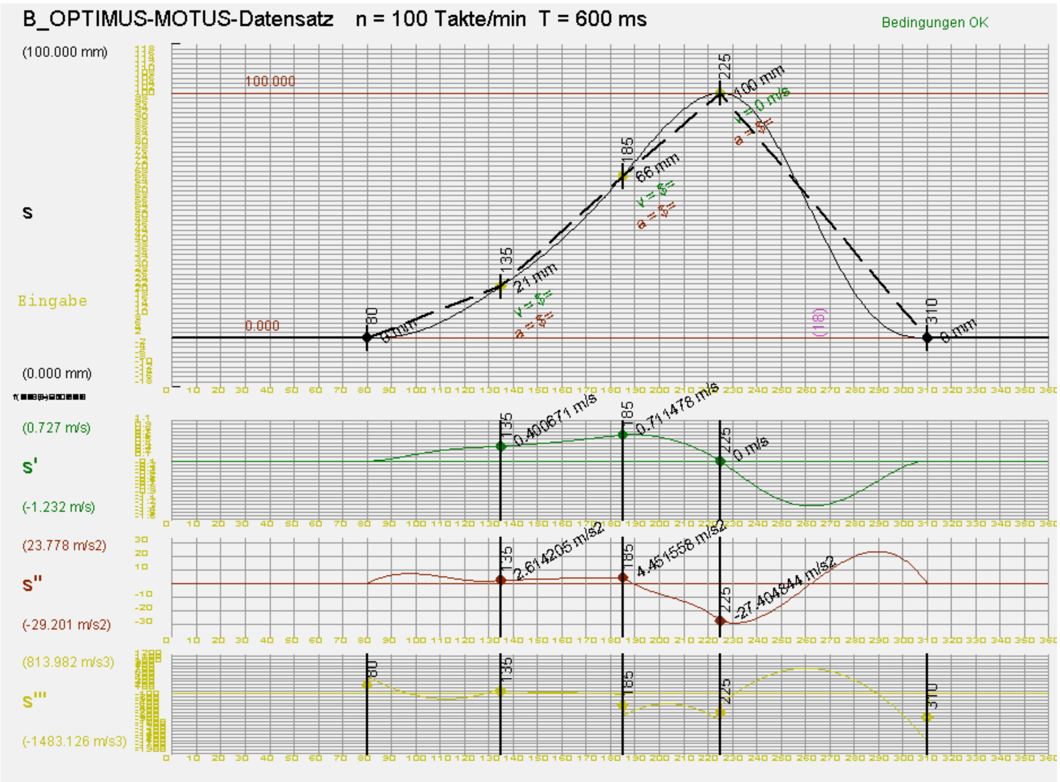

Bild 1: Bewegungsgestaltung mit quintischen Splines bzw. Polynomen 5. Ordnung

Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Die VDI-Richtlinie 2143 bietet hier das Bewegungsgesetz „Polynom 5. Ordnung B-B“ an. Werden mehrere Bewegungsgesetze dieses Typs hintereinandergehängt, erhält man einen quintischen Spline, dessen Stützpunkte mit Zeit, Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung so optimiert werden können, daß sich das gewünschte Bewegungsprofil ergibt. Diese Stützpunkte werden dabei nicht nur durch die funktionsbedingten Grenzlagen des Bewegungsplans gebildet, sondern auch durch künstlich gesetzte Zwischenpunkte, die nur zur Bewegungsoptimierung verwendet werden sollen. Bild 1 zeigt einen solchen Spline.

In der Praxis erweist sich dieser Ansatz aber oft als umständlich. Gerade bei kniffligen Bewegungsauslegungen, bei denen viele sich widersprechende Kriterien berücksichtigt werden müssen oder bei denen viele Zwischen-Stützpunkte erforderlich sind, entsteht eine hohe Zahl von Optimierungsparametern: je Zwischen-Stützpunkt Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung, zusätzlich ggf. Geschwindigkeit und Beschleunigung in den funktionsbedingten Grenzlagen.
Der Aufwand für die Optimierung, die in der Regel manuell durchgeführt werden muß, steigt exponentiell mit der Anzahl der beteiligten Optimierungsparameter.

Einen leistungsfähigeren Ansatz für die Bewegungsoptimierung bieten dagegen allgemeine Polynome mit beliebig hohem Polynomgrad.

Für ein normiertes Bewegungsgesetz, dessen Zeitparameter z und Wegfunktion f jeweils von 0 bis 1 laufen, sieht ein allgemeines Polynom n-ter Ordnung folgendermaßen aus:

$$f(z) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}\bullet z + \mathbf{a_2}\bullet z^2 + \mathbf{a_3}\bullet z^3 + \ldots + \mathbf{a_n}\bullet z^n$$
$$f'(z) = \mathbf{a_1} + 2\bullet\mathbf{a_2}\bullet z + 3\bullet\mathbf{a_3}\bullet z^2 + \ldots + n\bullet\mathbf{a_n}\bullet z^{(n-1)}$$
$$f''(z) = 2\bullet\mathbf{a_2} + 6\bullet\mathbf{a_3}\bullet z + 12\bullet\mathbf{a_4}\bullet z^2 + \ldots + n\bullet(n-1)\bullet\mathbf{a_n}\bullet z^{(n-2)}$$
$$f'''(z) = 6\bullet\mathbf{a_3} + 24\bullet\mathbf{a_4}\bullet z + \ldots + n\bullet(n-1)\bullet(n-2)\bullet\mathbf{a_n}\bullet z^{(n-3)}$$
$$f''''(z) = 24\bullet\mathbf{a_4} + 120\bullet\mathbf{a_4}\bullet z + \ldots + n\bullet(n-1)\bullet(n-2)\bullet(n-3)\bullet\mathbf{a_n}\bullet z^{(n-4)}$$
...

Polynome n-ter Ordnung haben n+1 anpaßbare Koeffizienten $\mathbf{a_0}$ ... $\mathbf{a_n}$, so daß damit n+1 Interpolationsbedingungen erfüllt werden können.

Zur dynamisch günstigen Gestaltung eines Bewegungsabschnitts im Bewegungsdiagramm werden nun zweckmäßig einzelne Stützpunkte mit Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung oder höheren Ableitungen an beliebigen Stellen innerhalb des normierten Bewegungsabschnitts vorgegeben.
Mit Hilfe der allgemeinen Polynomdarstellung f(z) und ihrer Ableitungen wird aus diesem Satz von Interpolationsbedingungen ein lineares Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten des allgemeinen Polynoms berechnet werden. Die Ordnung des Polynoms ergibt sich aus der Anzahl der Interpolationsbedingungen:

Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Polynomgrad = (Anzahl Bedingungen) - 1

Beispiel:

Interpolationsbedingungen
(i = Ableitungsordnung, z = Zeitparameter, f = Funktionswert):

1. f(0) = 0	bzw.	i=0, z=0, f=0
2. f(1) = 1	bzw.	i=0, z=1, f=1
3. f'(0) = 0	bzw.	i=1, z=0, f=0
4. f'(1) = 0	bzw.	i=1, z=1, f=0
5. f''(0) = 0	bzw.	i=2, z=0, f=0
6. f'''(0) = 0	bzw.	i=3, z=0, f=0
7. f'''(1) = 0	bzw.	i=3, z=1, f=0
8. f''''(1) = 0	bzw.	i=4, z=1, f=0
9. f(0.4) = 0.2	bzw.	i=0, z=0.4, f=0.2

9 Bedingungen → Polynomgrad 8

Aufstellen des linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten :

1. $a_0 = 0$
2. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 1$
3. $a_1 = 0$
4. $a_1 + 2 \bullet a_2 + 3 \bullet a_3 + 4 \bullet a_4 + 5 \bullet a_5 + 6 \bullet a_6 + 7 \bullet a_7 + 8 \bullet a_8 = 0$
5. $2 \bullet a_2 = 0$
6. $6 \bullet a_3 = 0$
7. $6 \bullet a_3 + 24 \bullet a_4 \bullet z + 60 \bullet a_5 \bullet z^2 + 120 \bullet a_6 \bullet z^3 + 210 \bullet a_7 \bullet z^4 + 336 \bullet a_8 \bullet z^5 = 0$
8. $24 \bullet a_4 + 120 \bullet a_5 + 360 \bullet a_6 + 840 \bullet a_7 + 1680 \bullet a_8 = 0$
9. $a_0 + a_1 \bullet 0.4 + a_2 \bullet 0.4^2 + a_3 \bullet 0.4^3 + a_4 \bullet 0.4^4 + a_5 \bullet 0.4^5 + a_6 \bullet 0.4^6 + a_7 \bullet 0.4^7 + a_8 \bullet 0.4^8 = 0.2$

Gleichungssystem lösen: $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 22.1220238095$, $a_5 = -51.6392857143$, $a_6 = 46.9938492063$, $a_7 = -19.5579365079$, $a_8 = 3.08134920635$

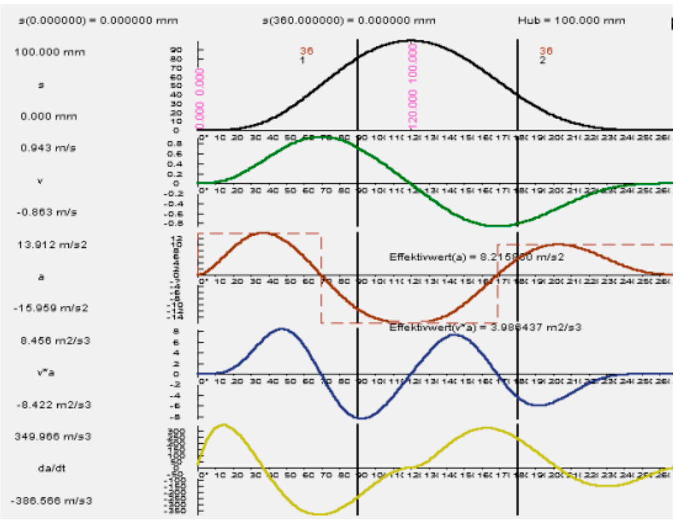

Bild 2: Abschnitt phi = 0 bis 120 Grad enthält das ermittelte Polynom-Bewegungsgesetz

Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Zunächst sieht dieser Ansatz komplizierter und umständlicher aus als die Optimierung mit einer Folge von Polynomen 5. Ordnung.

Entscheidend ist aber, daß bei angemessener Vorgabe von Interpolationsbedingungen im Rahmen des Bewegungsdesigns keine oder nur wenige Parameter anfallen, die manuell optimiert werden müßten. Bei praktischen Bewegungsdesign-Aufgaben verbleibenden außerdem fast ausschließlich solche Optimierungsparameter, die mit einem bestimmten numerischen Algorithmus ermittelt werden können.

Polynome haben generell die günstige Eigenschaft, daß in ihrem Inneren alle Ableitungen stetig sind.

Problematisch ist hingegen, daß Polynome überschwingen können, d.h. daß ihre Funktionswerte den durch den Hub vorgesehenen Wertebereich verlassen können. Manchmal ist dieses gewünscht bzw. bei Ruckfreiheit nicht anders möglich, manchmal ist das Überschwingen aber auch ausdrücklich unerwünscht. Dann sind zusätzliche Interpolationsbedingungen notwendig, um das Überschwingen zu verhindern.

An Hand von typischen Beispielen soll gezeigt werden, wie bestimmte Design-Anforderungen mit Polynomen höherer Ordnung umgesetzt werden können.
Bei Rast-in-Rast-Übergängen (R-R) werden immer die Interpolationsbedingungen f(0)=0, f(1)=1, f‘(0)=0, f‘(1)=0, f“(0)=0 und f“(1)=0 gesetzt. In der Folge werden diese Bedingungen nicht jedesmal ausdrücklich aufgeführt.

Stetige Ruckfunktion

Für schnelllaufende, d.h. in der Nähe oder im Bereich von Resonanzen arbeitende Abtriebsbewegungen sollte nicht nur die Beschleunigung, sondern auch die Ableitung der Beschleunigung, die sogenannte Ruckfunktion, stetig sein. Die meisten Bewegungsgesetze der VDI-Richtlinie 2143 sind zwar ruckfrei, d.h. stetig in der Beschleunigung, haben aber Sprünge in der Ruckfunktion.
Mit Polynomen höherer Ordnung werden die Interpolationsbedingungen f‘‘‘(0)=0 und f‘‘‘(1)=0 vorgegeben. Für einen Rast-in-Rast-Übergang entsteht so das Polynom 7. Ordnung mit stetiger Ruckfunktion (siehe Bild 3).

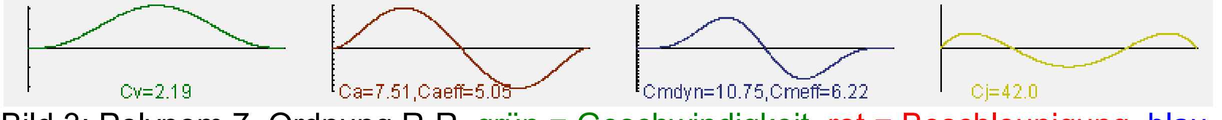

Bild 3: Polynom 7. Ordnung R-R, grün = Geschwindigkeit, rot = Beschleunigung, blau = Leistungsverlauf, gelb = Ruckfunktion

Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Wendepunktverschiebung

Bekannt ist eine spezielle Transformation der Bewegungsgesetze nach VDI2143, um den Anfang bzw. das Ende eines Bewegungsabschnitts „weicher“ zu machen: die Wendepunktverschiebung. Diese Transformation erhält zwar die Ruckfreiheit des Bewegungsgesetzes, erzeugt aber Sprünge in der Ruckfunktion.
Bei einem höheren Polynom kann die Interpolationsbedingung $f(\lambda) = \lambda$ mit dem Wendepunktsparameter λ verwendet werden, um die Wendepunktverschiebung ohne zusätzliche Sprünge in der Ruckfunktion zu erreichen.

Reduzieren der Maximalbeschleunigung

Das oben gezeigte Polynom 7. Ordnung R-R besitzt zwar einen sehr weichen Beschleunigungsverlauf mit stetiger Ruckfunktion und niedrigen Ruckfunktionswerten, aber ungünstigerweise auch sehr hohe Beschleunigungskennwerte.
Die Maximalwerte der Beschleunigung können reduziert werden, indem Steigung und Krümmung der Beschleunigung an günstigen Stellen im Beschleunigungs- und Verzögerungsbereich auf 0 gesetzt werden, so daß Abflachungen im Beschleunigungsverlauf entstehen. Auch mit kleineren Maximalbeschleunigungen erreicht der Bewegungsabschnitt dann den gleichen Hub in gleicher Zeit.
Wird für den R-R-Übergang z.B. $f'''(0)=0$, $f'''(1)=0$, $f'''(0.2)=0$, $f''''(0.2)=0$, $f'''(0.8)=0$, $f''''(0.8)=0$ gesetzt, so entsteht das Polynom 11. Ordnung R-R (Bild 4):

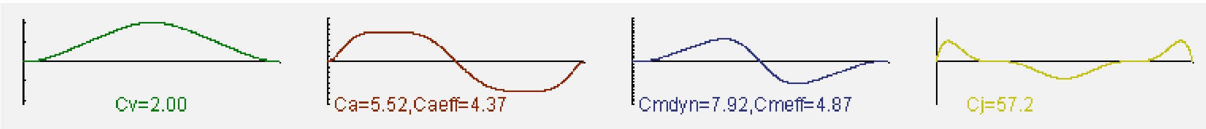

Bild 4: Polynom 11. Ordnung R-R

Werden im Beschleunigungs- oder im Verzögerungsbereich noch weitere Ableitungen auf 0 gesetzt, so verbreitert sich die jeweilige Flachstelle in der Beschleunigung, so daß auch der dortige Maximalwert der Beschleunigung sinkt.
Werden in Beschleunigungs- und Verzögerungsbereich unterschiedlich viele Ableitungen auf 0 gesetzt, entsteht ein Effekt ähnlich einer Wendepunktverschiebung. Setzt man z.B. für den R-R-Übergang $f'''(0)=0$, $f'''(1)=0$, $f'''(0.25)=0$, $f''''(0.25)=0$, $f^{(5)}(0.25)=0$, $f^{(6)}(0.25)=0$, $f^{(7)}(0.25)=0$, $f^{(8)}(0.25)=0$, $f'''(0.82)=0$, $f''''(0.82)=0$, $f^{(5)}(0.82)=0$, $f^{(6)}(0.82)=0$, so erhält man folgenden Beschleunigungsverlauf (siehe Bild 5):

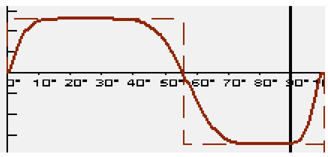

Bild 5: asymmetrische Bewegungsgestaltung mit niedrigen Maximalbeschleunigungen und stetiger Ruckfunktion

Bewegungsdesign nach Maß mit höheren Polynomen

Geradeneinschübe

Um Übertragungswinkel zu verbessern, Stegdicken bei Stegkurven zu vergrößern, Spitzendrehzahlen bei Servomotoren und Getrieben zu reduzieren oder das Effektivmoment an Servomotoren zu optimieren, ist oft der Einschub von Bereichen konstanter Geschwindigkeit in der Mitte des Bewegungsabschnitts hilfreich.
Durch solche Geradeneinschübe wird die Maximalgeschwindigkeit über einen längeren Zeitraum gehalten, so daß der gleiche Hub in gleicher Zeit mit geringerem Absolutwert der Maximalgeschwindigkeit erreicht wird.

Setzt man z.B. in einem R-R-Übergang $f'''(0)=0$, $f'''(1)=0$, $f'''(0.14)=0$, $f''''(0.14)=0$, $f'''(0.86)=0$, $f''''(0.86)=0$, $f''(0.5)=0$, $f'''(0.5)=0$, $f''''(0.5)=0$, $f^{(5)}(0.5)=0$, so entsteht ein Bewegungsgesetz mit einem angenäherten Bereich konstanter Geschwindigkeit und folgendem Beschleunigungsverlauf (Bild 6):

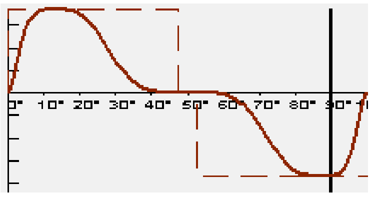

Bild 6: quasi-Geradeneinschübe mit Polynomen höherer Ordnung

In den vorangegangenen Beispielen sind in den Interpolationsbedingungen teilweise z-Parameter ungleich 0, 0.5 und 1 angegeben (z.B. 0.25, 0.82, 0.14, 0.86). Diese Parameterwerte sind Ergebnis einer kurzen manuellen bzw. einer automatisch ablaufenden Optimierung. Sie werden so ermittelt, daß sich Flachpunkte und keine Sattelpunkte im Beschleunigungsverlauf ergeben.

Interessant ist vor allem, daß sich verschiedene Design-Anforderungen für einen Bewegungsabschnitt gleichzeitig erfüllen lassen, wenn die entsprechenden Interpolationsbedingungen kombiniert werden. Aus diesen Kombinationsmöglichkeiten ergibt sich die eigentliche Leistungsfähigkeit von höheren Polynomen beim Bewegungsdesign.

Fazit

Der vorliegende Beitrag zeigt, daß Polynome höherer Ordnung ein besonders elegantes und effizientes Bewegungsdesign ermöglichen, wenn die zugehörigen Interpolationsbedingungen sachgerecht vorgegeben werden.

Literatur

/1/ VDI-Richtlinie 2143 Blatt 1, Weißdruck Oktober 1980