Orthotropes Material

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \tag{6.8}$$

mit den Querkontraktionszahlen

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \tag{6.9}$$

verbleiben **9 unabhängige Parameter**, z. B.: E_1, E_2, E_3, ν_{12}, ν_{13}, ν_{23}, G_{12}, G_{13} und G_{23}.
Für den wichtigen Sonderfall des **ebenen Spannungszustandes**

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0\\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0\\ 0 & 0 & 1/G_{12}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \tag{6.10}$$

müssen 4 bzw. 6 Parameter definiert werden: E_1, E_2, ν_{12} und G_{12} sowie ggf. G_{13} und G_{23}:

- Bei schubweichen Schalen lassen sich die **transversalen Schubsteifigkeiten** K_{11} und K_{22} mittels Gleichung (5.15) aus G_{13} und G_{23} berechnen.
  - Die transversalen Schubspannungen $\tilde{\sigma}_{13}$ und $\tilde{\sigma}_{23}$ werden nicht aus dem Stoffgesetz, sondern aus **Gleichgewichtsbedingungen** ermittelt.
  - Verwechslungsgefahr: $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, aber im Allgemeinen $\tilde{\sigma}_{13} \neq 0$ und $\tilde{\sigma}_{23} \neq 0$ (Postprozessing-Größen).
  - Nach wie vor gilt: $\sigma_{33} = 0$.
  - Bei direkter Vorgabe von K_{11} und K_{22} werden G_{13} und G_{23} nicht benötigt.
- Auch bei schubsteifen Schalen ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$) kann auf die Eingabe der Schubsteifigkeiten G_{13} und G_{23} verzichtet werden.

Anstelle von Ingenieurkonstanten kann die **Steifigkeitsmatrix** direkt vorgegeben werden:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{1111} & \mathbb{C}_{1122} & \mathbb{C}_{1133} & 0 & 0 & 0\\ & \mathbb{C}_{2222} & \mathbb{C}_{2233} & 0 & 0 & 0\\ & & \mathbb{C}_{3333} & 0 & 0 & 0\\ & & & \mathbb{C}_{1212} & 0 & 0\\ & \text{sym.} & & & \mathbb{C}_{1313} & 0\\ & & & & & \mathbb{C}_{2323}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{bmatrix} \tag{6.11}$$

- **Transversale Schubsteifigkeiten** (bei linear elastischem, orthotropem Material):

$$K_{11} = \kappa G_{13} t \quad , \quad K_{22} = \kappa G_{23} t \quad , \quad K_{12} = K_{21} = 0 \tag{5.15}$$

$\kappa = \frac{5}{6}$:	Schub(korrektur)faktor (parabolische Verteilung der transversalen Schubspannungen)
G_{13}, G_{23}:	Schubmodule
t:	Schalendicke

- Effektive transversale Schubsteifigkeiten:

$$K_{11}^{\text{eff}} = f K_{11} \quad , \quad K_{22}^{\text{eff}} = f K_{22} \quad , \quad K_{12}^{\text{eff}} = f K_{12} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{1 + \gamma A_{\text{elem}}/t^2} \tag{5.16}$$

γ:	**Schlankheitskorrekturfaktor**: Vermeidung zu großer transversaler Schubsteifigkeiten bei zu grober Vernetzung, z. B. $\gamma = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$.
A_{elem}:	Fläche des Schalenelementes

- Außerdem existieren noch eine Reihe weiterer möglicher Unterschiede:
  - Bei voll integrierten Schalen kann es sein, dass die Membranspannungen mit inkompatiblen Moden angereichert werden, um Biegung in der Ebene exakt (ohne Locking und Hourglassing) berechnen zu können.
  - Es gibt Schalenelemente für Verwölbung.
  - usw.