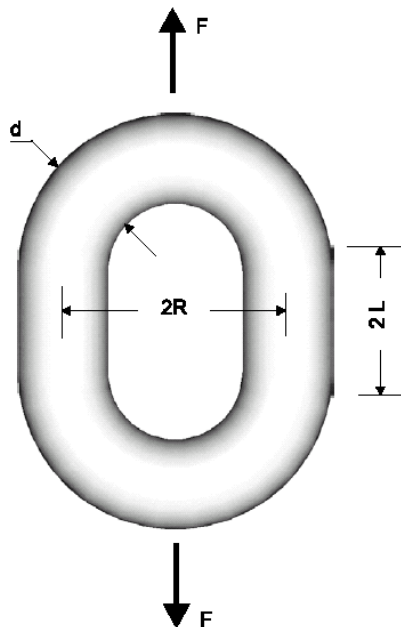


Aufgabe 6.2

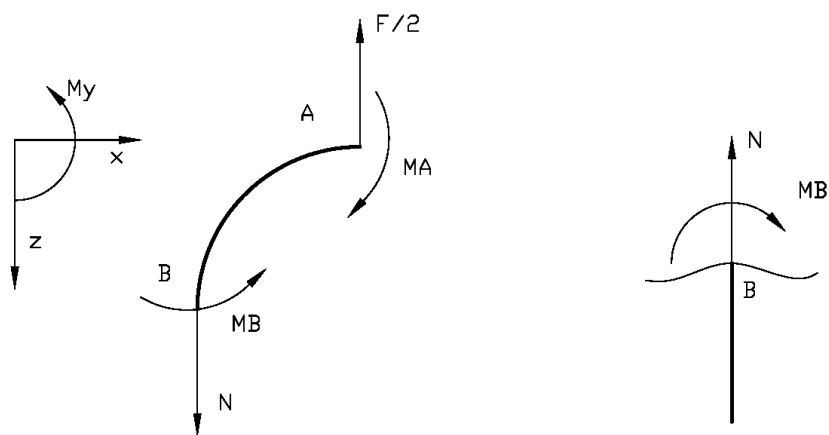
Gegeben: $d = 8\text{mm}$ $R = 10\text{mm}$



a) Für das dargestellte Kettenglied ist die Länge L so zu bestimmen, daß bezogen auf die im Kettenglied auftretenden maximalen Nenn-(Zug)spannungen aus Biegung und Zug infolge der Zugkraft F eine möglichst gute Bauteilnutzung erfolgt.

b) Wie groß ist die maximal zulässige Kraft (F)_{zul} wenn eine zulässige Nennspannung (σ) _{zul} = 215 N/mm² angenommen wird.

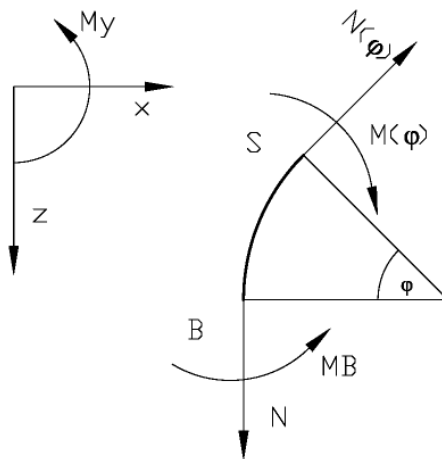
I. Freischnitt mit Ausnutzung der Symmetrie



GGW:

$$\sum F_Z \equiv 0 \rightarrow \boxed{N = \frac{F}{2}} \quad \sum M_A \equiv 0 \rightarrow M_B - M_A + Nr = 0 \rightarrow \boxed{M_B = M_A - \frac{F}{2}r}$$

Schnittlasten:



$$\sum M_{\text{Zentrum}} = 0 = Nr + M_B - M(\varphi) - N(\varphi)r \quad \text{Setze } M_\varphi \text{ für } M(\varphi) \text{ und } N_\varphi \text{ für } N(\varphi)$$

$$\frac{M_\varphi}{r} + N_\varphi = \frac{M_B}{r} + N = F^* \quad \text{An beliebigem Schnittpunkt ist } F^* \text{ konstant.}$$

Momentengleichgewicht um S liefert:

$$\sum M_0 = 0 = -M_\varphi + M_B + N(r - r\cos(\varphi))$$

$$M_\varphi = M_B + N(r - r\cos(\varphi)) = M_A - \frac{F}{2}r + \frac{F}{2}(r - r\cos(\varphi)) = \boxed{M_A - \frac{F}{2}r\cos(\varphi)}$$

$$M_z = M_B = M_A - \frac{F}{2}r \quad \text{Schnittmoment im geraden Bereich}$$

M_A ist unbekannt, da 1-fach statisch unbestimmt bemühen wir den Satz von CASTIGLIANO

Für den stark gekrümmten Balken ist Querkraft nicht vernachlässigbar:

$$W = \int \left(\frac{M_\varphi^2}{2EZ} + \frac{(F^*)^2}{2EA} \right) r d\varphi \quad \text{mit } Z = \int \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{R}} dA \quad (\text{modifiziertes I:Flächenträgheitsmoment})$$

η : Zusätzliche Koordinate mit Nullpunkt in der Mitte der Balkenhöhe (analog zu e), also η [-h/2 bis h/2]

Für den geraden Balken vernachlässigen wir wie gehabt Quer- und Längskräfte: $W_{F_b} = \int \frac{M_b^2}{2EI} dz$

$$W_{\text{ges}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_\varphi^2}{2EZ} + \frac{(F^*)^2}{2EA} \right) r d\varphi + \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI} dz = \quad \text{mit } F^* = \frac{M_B}{r} + N, M_A - \frac{F}{2}r \text{ und } N = \frac{F}{2}$$

$$0 = \frac{\partial W_{\text{ges}}}{\partial M_A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_\varphi}{EZ} \frac{\partial M_\varphi}{\partial M_A} r d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F^*}{EA} \frac{\partial F^*}{\partial M_A} r d\varphi + \int_0^l \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial M_A} dz$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(M_A - \frac{F}{2}r\cos(\varphi) \right)}{\partial M_A} = 1 \quad \frac{\partial F^*}{\partial M_A} = \frac{\frac{M_B}{r} + N}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(\frac{M_A - \frac{F}{2}r}{r} + \frac{F}{2} \right)}{\partial M_A} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(M_A - \frac{F}{2}r \right)}{\partial M_A} = 1$$

$$0 = \frac{\partial W_{\text{ges}}}{\partial M_A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_A r - \frac{F}{2}r^2 \cos(\varphi)}{EZ} \right) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_A}{EA} \frac{1}{r} r \right) d\varphi + \int_0^l \left(\frac{M_A - \frac{F}{2}r}{EI} \right) dz$$

$$0 = \frac{1}{ZE} \left(\frac{1}{2} \pi r M_A - \frac{1}{2} F r^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{ArE} M_A + \frac{1}{2EI} (2l M_A - F l r)$$

$$0 = \frac{1}{Z} (\pi r M_A - F r^2) + \frac{\pi}{Ar} M_A + \frac{1}{l} (2l M_A - F l r)$$

$$0 = \frac{\pi}{Z} r M_A - \frac{F}{Z} r^2 + \frac{\pi}{Ar} M_A + 2 \frac{l}{l} M_A - F l \frac{r}{l}$$

$$\boxed{\frac{F \left(\frac{r^2}{Z} + l \frac{r}{l} \right)}{\left(\frac{\pi}{Z} r + \frac{\pi}{Ar} + 2 \frac{l}{l} \right)} = M_A}$$

Nun ist L so zu bestimmen dass $\sigma_i = \sigma_a$

$$\sigma_i = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\phi}{Z} \left(\frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \right) \text{ mit } \eta = -\frac{d}{2} \text{ ist } \sigma_i = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\phi}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} \right)$$

$$\sigma_a = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\phi}{Z} \left(\frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \right) \text{ mit } \eta = \frac{d}{2} \text{ ist } \sigma_a = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\phi}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right)$$

$$\sigma_i = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A - \frac{F}{2} r \cos(\phi)}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} \right) \quad \max \sigma_i(\phi) \text{ f\"ur } \phi = 0 \rightarrow \sigma_{i \max} = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A - \frac{F}{2} r}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} \right)$$

$$\sigma_a = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A - \frac{F}{2} r \cos(\phi)}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right) \quad \max \sigma_a(\phi) \text{ f\"ur } \phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sigma_{a \max} = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right)$$

Durch Gleichsetzen der Maximalgleichungen und Einsetzen der Momentengleichung ist die Länge eindeutig zu bestimmen.

$$\sigma_i = \sigma_a \rightarrow \frac{M_A - \frac{F}{2} r}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} \right) = \frac{M_A}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right)$$

$$\left(M_A - \frac{F}{2} r \right) \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} \right) = M_A \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right)$$

$$M_A \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} - \frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right) = \frac{F}{2} r \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1 + \frac{-d}{2r}} \right)$$

$$M_A \left(\frac{-\frac{8 \text{ mm}}{2}}{1 + \frac{-8 \text{ mm}}{2 \cdot 10 \text{ mm}}} - \frac{\frac{8 \text{ mm}}{2}}{1 + \frac{8 \text{ mm}}{2 \cdot 10 \text{ mm}}} \right) = F \cdot 5 \text{ mm} \left(\frac{-\frac{8 \text{ mm}}{2}}{1 + \frac{-8 \text{ mm}}{2 \cdot 10 \text{ mm}}} \right)$$

$$M_A \left(-\frac{200}{21} \text{ mm} \right) = F \left(-\frac{100}{3} \text{ mm}^2 \right) \rightarrow F = \frac{2M_A}{7 \text{ mm}}$$

Einschub zu Z:

$$Z = I \left[1 + \frac{3}{6} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots \right] \quad d=2e \text{ [Quelle ten Bosch]}$$

$$Z = \frac{\pi}{64} 4096 \text{ mm}^4 \left[1 + \frac{3}{6} \left(\frac{4}{10} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} \left(\frac{4}{10} \right)^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{4}{10} \right)^6 \right]$$

$$Z = \frac{\pi}{64} 4096 \text{ mm}^4 \cdot \frac{17014}{15625} = \frac{1088896}{15625} \pi \text{ mm}^4 = 2.1894 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$M_A = \frac{-\frac{2M_A}{7 \text{ mm}} \left(\frac{r^2}{Z} + l \frac{r}{l} \right)}{\left(\frac{\pi}{Z} r + \frac{\pi}{Ar} + 2 \frac{l}{l} \right)}$$

$$1 = \frac{\frac{2}{7 \text{ mm}} \left(\frac{100 \text{ mm}^2}{\frac{1088896}{15625} \pi \text{ mm}^4} + l \frac{10 \text{ mm}}{\frac{\pi}{64} 4096 \text{ mm}^4} \right)}{\left(\frac{\pi}{\frac{1088896}{15625} \pi \text{ mm}^4} 10 \text{ mm} + \frac{\pi}{16 \pi \text{ mm}^2 \cdot 10 \text{ mm}} + 2 \frac{l}{\frac{\pi}{64} 4096 \text{ mm}^4} \right)} = \frac{2}{7(\text{mm}) \left(\frac{407639}{2722240 \text{ mm}^3} + \frac{1}{32\pi} \frac{l}{\text{mm}^4} \right)} \left(\frac{390625}{272224\pi \text{ mm}^2} + \frac{5}{32\pi} \frac{l}{\text{mm}^3} \right)$$

$$7(\text{mm}) \left(\frac{407639}{2722240 \text{ mm}^3} + \frac{1}{32\pi} \frac{l}{\text{mm}^4} \right) = 2 \left(\frac{390625}{272224\pi \text{ mm}^2} + \frac{5}{32\pi} \frac{l}{\text{mm}^3} \right)$$

$$\frac{7 \cdot 407639}{2722240 \text{ mm}^2} + \frac{7}{32\pi} \frac{l}{\text{mm}^3} = \frac{2 \cdot 390625}{272224\pi \text{ mm}^2} + \frac{10}{32\pi} \frac{l}{\text{mm}^3}$$

$$\left(\frac{7 \cdot 407639}{2722240 \text{ mm}^2} - \frac{2 \cdot 390625}{272224\pi \text{ mm}^2} \right) \frac{32\pi \text{ mm}^3}{3} = l$$

$$l = 4.5137 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Zu Teil B)

$$\sigma_a = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right) \quad F = \frac{2M_A}{7 \text{ mm}} \rightarrow M_A = \frac{7}{2} \text{ mm} \cdot F \quad \sigma_a = \sigma_{zul} = 215 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_a = M_A \left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right) \right)$$

$$\frac{\sigma_a}{\left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right) \right)} = M_A \rightarrow F = \frac{2\sigma_a}{7 \text{ mm} \left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2r}} \right) \right)}$$

$$F = \frac{2 \cdot 215 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{7 \text{ mm} \left(\frac{1}{16\pi \text{ mm}^2 \cdot 10 \text{ mm}} + \frac{1}{\frac{1088896}{15625} \pi \text{ mm}^4 \left(1 + \frac{8 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} \right)} \right)} = \frac{292640800}{225087} \pi \text{ N}$$

$$F = 4084.5 \text{ N}$$