$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$ annimmt, ergeben sich für die Größen Δ, δ und S bei Berechnung nach den neuen Koeffizienten die ursprünglichen Werte.

Die Bestimmung der Gestalt der Kurve, die durch eine Gleichung zweiten Grades gegeben ist und die Transformation auf die Normalform geschieht nach der Tabelle auf S. 182 bis 183.

Allgemeine Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung (*Kegelschnitte*). Wird ein gerader Kreiskegel von einer Ebene geschnitten, so entsteht ein sog. Kegelschnitt. Wenn die Schnittebene nicht durch die Kegelspitze hindurchgeht, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem, ob die Schnittebene zwei, einer oder keiner Erzeugenden des Kegels parallel ist. Wird der Kegel von einer Ebene geschnitten, die durch dessen Spitze hindurchgeht, so entstehen zerfallende Kegelschnitte ($\Delta = 0$, vgl. Tabelle auf S. 182 bis 183). Parallele Geraden ergeben sich, falls der Kegel in einen Zylinder ausartet (die Kegelspitze rückt ins Unendliche).

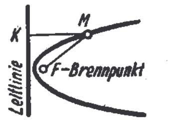


Abb. 195

Die Leitlinieneigenschaft. Der geometrische Ort aller Punkte M (Abb. 195), für die das Verhältnis der Abstände zu einem gegebenen Punkt (*Brennpunkt*) F und zu einer gegebenen Geraden (*Leitlinie*) konstant gleich e ist, ist eine Kurve zweiter Ordnung mit der numerischen Exzentrizität e. Für $e < 1$ hat man eine Ellipse, für $e = 1$ eine Parabel und für $e > 1$ eine Hyperbel.

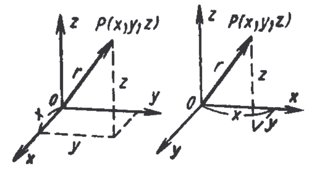
Bestimmung der Kurve durch fünf Punkte. Durch fünf gegebene Punkte geht eine und nur eine Kurve zweiter Ordnung hindurch. Falls wenigstens drei dieser Punkte in einer Geraden liegen, erhält man einen zerfallenden Kegelschnitt.

Polargleichung. In Polarkoordinaten haben die Kurven zweiter Ordnung die Gleichung $\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ (p – Parameter, e – Exzentrizität der gegebenen Kurve; der Pol liegt im Brennpunkt, die Polarachse ist vom Brennpunkt nach dem nächstgelegenen Scheitelpunkt hin gerichtet*).

B. Analytische Geometrie des Raumes

8. Grundlegende Begriffe und Formeln

Koordinaten. Die Lage eines Punktes P im Raum läßt sich mit Hilfe eines *Koordinatensystems* festlegen. Am gebräuchlichsten sind: 1. rechtwinklige kartesische Koordinaten, 2. die Zylinderkoordinaten und 3. die räumlichen Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten.


a) b)
Abb. 196

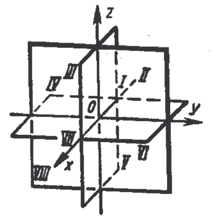


Abb. 197

Als *rechtwinklige kartesische Koordinaten* eines Punktes P bezeichnet man die mit einem bestimmten Vorzeichen genommenen, in einer bestimmten Maßeinheit gemessenen Abstände dieses Punktes von drei festen, aufeinander senkrechtstehenden Koordinatenebenen, oder, was dasselbe bedeutet, die Projektionen des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ des Punktes P (vgl. S. 447) auf drei aufeinander senkrechtstehende *Koordinatenachsen*. Je nach der gegenseitigen Lage der positiven Achsenrichtungen sind ein rechtshändiges (Abb. 196, a) oder ein linkshändiges (Abb. 196, b) Koordinatensystem möglich. Im weiteren ist auf allen Zeichnungen das Rechtssystem zugrunde gelegt (die Formeln sind von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig). Der Schnittpunkt der Koordinatenachsen heißt *Koordinatenursprung* oder *Koordinatenanfangspunkt*. Die Koordinaten x, y bzw. z bezeichnet man als *Abszisse*, *Ordinate* bzw. *Applikate*. Die Schreibweise $P(a, b, c)$ besagt, daß der Punkt P die Koordinaten $x = a$, $y = b$ und $z = c$ hat. Die Vorzeichen der Koordinaten hängen von dem Oktanten ab, in dem sich der betr. Punkt befindet (Abb. 197):

* Bei der Hyperbel wird durch diese Gleichung nur der eine Ast definiert.

Oktant	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Koordinatenflächen, d. h. Flächen, für die eine der Koordinaten konstant bleibt, sind hier die Ebenen, die zwei Koordinatenachsen parallel sind; die *Koordinatenlinien* sind Kurven, längs deren sich nur eine Koordinate ändert; im kartesischen Koordinatensystem sind es die Geraden, die den Koordinatenachsen parallel sind. Die Koordinatenflächen schneiden einander in den Koordinatenlinien.

Ein allgemeineres *krummliniges Koordinatensystem* erhält man, indem man sich irgendwelche drei Scharen von Flächen derart vorgibt, daß durch jeden Punkt des Raumes je eine Fläche der drei Scharen hindurchgeht. Die Lage eines Punktes in einem solchen

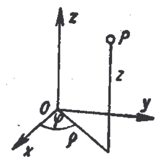


Abb. 198

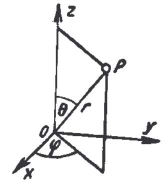


Abb. 199

System wird durch die Parameterwerte der drei durch diesen Punkt hindurchgehenden Koordinatenflächen festgelegt. Die gebräuchlichsten krummlinigen Koordinatensysteme, die Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten, sind weiter unten beschrieben.

Die *Zylinderkoordinaten* (Abb. 198): ϱ und φ sind die Polarkoordinaten der Projektion des Punktes P auf die Hauptebene (gewöhnlich x,y-Ebene), z ist die Applikate, d. h. der Abstand des Punktes P von der Hauptebene.

Im Zylinderkoordinatensystem sind die Koordinatenflächen einmal die zur z-Achse senkrechten Ebenen (z = const), die von der z-Achse ausgehenden Halbebenen (φ = const) und die Zylinderflächen, deren Achse die z-Achse ist (ϱ = const). Die Koordinatenlinien sind die Schnittlinien dieser Flächen.

Die Formeln für den Übergang von den Zylinderkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten und umgekehrt sind

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z;$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\varrho}.$$

Die *Polar-(Kugel-)koordinaten*: r – Länge des *Radiusvektors*, φ – *geographische Länge* und Θ – *geographische Breite*. Die positiven Richtungen sind in Abb. 199 angegeben. Legt man für die Kugelkoordinaten die Wertebereiche $0 \leqq r < \infty$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$, $0 \leqq \Theta \leqq \pi$ fest, so erhält man eindeutig alle Punkte des Raumes.

Die Koordinatenflächen sind einmal die Kugeln mit dem Pol 0 als Mittelpunkt (r = const), die von der z-Achse ausgehenden Halbebenen (φ = const) und die Kegel mit der Spitze im Koordinatenursprung und der z-Achse als Achse (Θ = const). Die Koordinatenlinien sind die Schnittlinien dieser Flächen.

Der Rauminhalt eines Tetraeders mit den Eckpunkten $P(x,y,z)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ und $P_3(x_3,y_3,z_3)$ (Abb. 204) ist

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3\end{vmatrix}.$$

Bei Berechnung nach dieser Formel ist $V>0$, wenn die Orientierung des Vektorentripels PP_1, PP_2 und PP_3 mit der Orientierung des Koordinatensystems übereinstimmt (vgl. S. 449); im entgegengesetzten Falle ist $V<0$.
Vier Punkte P, P_1, P_2 und P_3 liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

erfüllt ist.

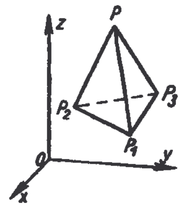


Abb. 204

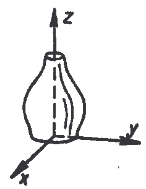


Abb. 205

Gleichung einer Fläche. Jeder Gleichung $F(x,y,z)=0$ entspricht eine Fläche mit der Eigenschaft, daß die Koordinaten eines beliebigen Flächenpunktes P dieser Gleichung genügen, und umgekehrt, daß jeder Punkt, dessen Koordinaten der gegebenen Gleichung genügen, auf der Fläche liegt. Die Gleichung $F(x,y,z)=0$ nennt man die Gleichung dieser Fläche.
Die Gleichung einer *Zylinderfläche* (vgl. S. 149), deren Erzeugende der x-Achse (y-Achse bzw. z-Achse) parallel sind, enthält die x-Koordinate (y-Koordinate, bzw. z-Koordinate) nicht: $F(y,z)=0$, $F(x,z)=0$ bzw. $F(x,y)=0$. In der y,z-Ebene stellt dieselbe Gleichung die Schnittkurve der Zylinderfläche mit der genannten Ebene dar.
Eine Zylinderfläche, für die die Richtung ihrer Erzeugenden durch Richtungskosinus (oder denen proportionale Größen) l, m, n gegeben sind, hat die Gleichung

$$F(nx-lz,\ ny-mz)=0.$$

Eine *Fläche*, die sich durch *Rotation* einer in der xz-Ebene gegebenen Kurve $z=f(x)$ um die z-Achse ergibt (Abb. 205), hat die Gleichung $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$. In analoger Weise ergeben sich auch die Gleichungen von Rotationsflächen, bei denen eine gegebene Kurve um eine andere Koordinatenachse rotiert.
Die Gleichung einer *Kegelfläche* (vgl. S. 150) mit der Spitze im Koordinatenursprung hat die Gestalt $F(x,y,z)=0$, worin F eine homogene Funktion der Koordinaten ist (vgl. S. 246).
Die Gleichung einer Raumkurve. Eine Kurve im Raum wird durch drei Gleichungen definiert: $x=\varphi_1(t)$; $y=\varphi_2(t)$; $z=\varphi_3(t)$. Jedem Wert des Parameters t (dem nicht immer ein unmittelbarer geometrischer Sinn beigemessen werden kann) entspricht ein bestimmter Punkt der Kurve. Eine andere Methode zur Definition einer Raumkurve besteht in der Angabe zweier Gleichungen $F_1(x,y,z)=0$ und $F_2(x,y,z)=0$. Jede davon definiert eine Fläche. Die Punkte, deren Koordinaten beiden Gleichungen genügen, liegen auf der Schnittkurve der gegebenen Flächen. Jede Gleichung der Form $F_1+\lambda F_2=0$ stellt bei beliebigem λ eine Fläche dar, die durch die betrachtete Kurve hindurchgeht, und kann somit eine der beiden gegebenen Gleichungen ersetzen.

9. Gerade und Ebene im Raum

Die Gleichung einer Ebene. Jede Gleichung, die in den Koordinaten linear ist, definiert eine Ebene, und umgekehrt, die Gleichung einer beliebigen Ebene ist vom ersten Grade.
Allgemeine Gleichung der Ebene: $Ax+By+Cz+D=0$; in Vektorschreibweise $\mathfrak{r}\mathfrak{N}+D=0$ (vgl. S. 450 und 452). Der Vektor $\mathfrak{N}(A,B,C)$ (Abb. 206) steht auf der Ebene senkrecht; seine Richtungskosinus sind

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

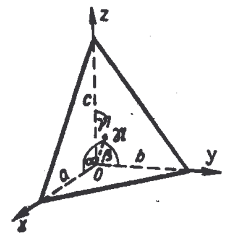


Abb. 206

Ist $D=0$, so geht die Ebene durch den Koordinatenursprung hindurch; für $A=0$ (bzw. $B=0$ oder $C=0$) ist die Ebene der x-Achse (bzw. der y-Achse oder z-Achse) parallel. Für $A=B=0$ (bzw. $A=C=0$ oder $B=C=0$) ist die Ebene der x,y-Ebene (bzw. der x,z-Ebene oder y,z-Ebene) parallel.
Die Hessesche Normalform der Ebenengleichung: $x\cos\alpha+y\cos\alpha+z\cos\alpha-p=0$; in Vektorschreibweise $\mathfrak{r}\mathfrak{N}^0-p=0$. Der Vektor $\mathfrak{N}^0$ ist ein Einheitsvektor, p ist der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung. Die Hessesche Normalform erhält man aus der allgemeinen Gleichung durch Multiplikation mit dem normierenden Faktor

$$\pm\mu=\frac{1}{N}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(das Vorzeichen von μ muß dem von D entgegengesetzt sein).
Die Achsenabschnittsform der Ebenengleichung: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; a, b, c sind die Strecken, die unter Berücksichtigung des Vorzeichens von der Ebene auf den Koordinatenachsen abgeschnitten werden (Abb. 206).
Gleichung einer Ebene
a) *durch drei Punkte* $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0,$$

in Vektorschreibweise $(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1)(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)(\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1)=0;$ *

b) *durch zwei Punkte* $P_1(x_1,y_1,z_1)$ und $P_2(x_2,y_2,z_2)$ *parallel zur Geraden mit dem Richtungsvektor* $\mathfrak{R}(l,m,n)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0,$$

in Vektorschreibweise $(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1)(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)\mathfrak{R}=0;$ *

c) *durch einen Punkt* $P_1(x_1,y_1,z_1)$ *parallel zu zwei Geraden mit den Richtungsvektoren* $\mathfrak{R}_1(l_1,m_1,n_1)$ *und* $\mathfrak{R}_2(l_2,m_2,n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0,$$

in Vektorschreibweise $(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1)\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2=0;$ *

---

* Gemischtes Produkt dreier Vektoren s. S. 450.

d) *durch einen Punkt* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *senkrecht zur Geraden mit dem Richtungsvektor* $\mathfrak{R}(A, B, C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

in Vektorschreibweise $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)\,\mathfrak{R} = 0$, *

e) *durch die Schnittlinie zweier Ebenen* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(Gleichung eines *Ebenenbüschels*, Abb. 207). Lassen wir λ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so erhalten wir alle Ebenen des Büschels. Für $\lambda = \pm 1$ ergeben sich die Gleichungen der Ebenen, die die Schnittwinkel der beiden gegebenen Ebenen halbieren, falls deren Gleichungen in der Normalform gegeben sind.

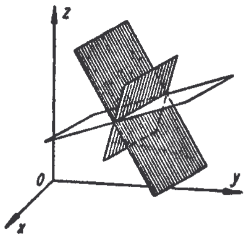


Abb. 207

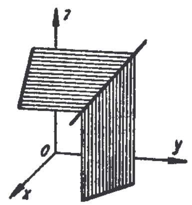


Abb. 208

Der Winkel zwischen zwei Ebenen – vgl. S. 194.

Der Schnittpunkt dreier Ebenen – vgl. S. 192.

Der Abstand von zwei parallelen Ebenen**

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \text{und} \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0 \quad \text{ist}$$

$$\delta = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Der Abstand eines Punktes von einer Ebene ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $M(a, b, c)$ in die Hessesche Normalform $(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0)$ der Ebenengleichung***:

$$\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma - p.$$

Liegen M und der Koordinatenanfangspunkt auf verschiedenen Seiten der Ebene, so ist $\delta > 0$; im entgegengesetzten Falle ist $\delta < 0$.

Gleichung einer Geraden im Raum. Die Gerade wird im Raum als der Schnitt zweier Ebenen definiert und analytisch durch ein System zweier linearer Gleichungen gegeben.

Allgemeine Gleichungen der Geraden:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

in Vektorschreibweise*

$$\begin{cases} \mathfrak{r}\mathfrak{R}_1 + D_1 = 0, \\ \mathfrak{r}\mathfrak{R}_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Gleichung der Geraden in zwei projizierenden Ebenen: $y = kx + a$, $z = hx + b$; jede dieser beiden Gleichungen definiert eine Ebene, die durch unsere Gerade hindurchgeht und auf der x,y- bzw. x,z-Ebene senkrecht steht (projizierende Ebene; Abb. 208). Für Geraden, die der y,z-Ebene parallel sind, ist diese Gleichungsform nicht anwendbar; in diesem Falle sind die Projektionen auf ein anderes Paar von Koordinatenebenen zu wählen.

Gleichung einer Geraden:

a) *durch einen gegebenen Punkt* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ parallel zum Richtungsvektor $\mathfrak{R}(l, m, n)$ (Abb. 209):

$$\mathrm{II}\ \left\{ \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \right.$$

in Vektorschreibweise $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) \times \mathfrak{R} = 0$† oder (Parameterform)

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt,$$

und in Vektorschreibweise $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{R}t$.

* Skalares Produkt von Vektoren s. S. 449.
** Parallelitätsbedingung für Ebenen s. S. 194.
*** Transformation der allgemeinen Gleichung einer Ebene auf die Hessesche Normalform s. S. 189.
† Vektorielle Produktbildungen s. S. 449.

Die *Gleichungsform* (II) ergibt sich aus (I) nach den Formeln

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};$$

in Vektorschreibweise $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$;* die Zahlen x_1, y_1, z_1 werden so gewählt, daß sie den Gleichungen (I) genügen;

b) *durch zwei gegebene Punkte* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (Abb. 210):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

in Vektorschreibweise

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) \times (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) = 0\,*;$$

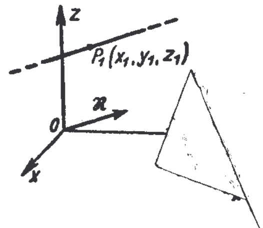
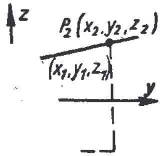


Abb. 209



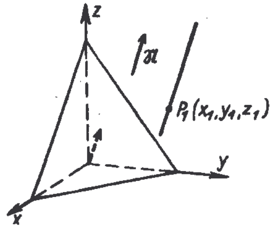


Abb. 211

c) *durch einen gegebenen Punkt P* … *nkrecht zur Ebene* $Ax + By + Cz + D = 0$ oder $\mathfrak{r}\mathfrak{R} + D = 0$* (Abb. 211)

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C},$$

in Vektorschreibweise $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) \times \mathfrak{R} = 0$.*

Der Abstand δ **eines Punktes** $M(a, b, c)$ **von einer Geraden,** deren Gleichung in der Form (II) gegeben ist, ergibt sich nach der Formel

$$\delta^2 = \frac{[(a - x_1)m - (b - y_1)l]^2 + [(b - y_1)n - (c - z_1)m]^2 + [(c - z_1)l - (a - x_1)n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Der kürzeste Abstand zwischen zwei Geraden, deren Gleichungen in der Form (II)

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

und

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

gegeben sind, läßt sich nach der Formel

$$\delta = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}$$

berechnen. Das Verschwinden der hier im Zähler stehenden Determinante ist die *Bedingung dafür, daß sich die zwei Geraden im Raum schneiden.*

* Produkte von Vektoren s. S. 449.

Schnittpunkte von Ebenen und Geraden

Die Koordinaten des Schnittpunktes	gegeben durch die Gleichungen	werden berechnet nach den Formeln	Anmerkungen
dreier Ebenen	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$	$\bar{x}=\frac{-\Delta_x}{\Delta},\ \bar{y}=\frac{-\Delta_y}{\Delta},\ \bar{z}=\frac{-\Delta_z}{\Delta},$ mit $\Delta=\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{vmatrix},\ \Delta_x=\begin{vmatrix}D_1&B_1&C_1\\D_2&B_2&C_2\\D_3&B_3&C_3\end{vmatrix},$ $\Delta_y=\begin{vmatrix}A_1&D_1&C_1\\A_2&D_2&C_2\\A_3&D_3&C_3\end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix}A_1&B_1&D_1\\A_2&B_2&D_2\\A_3&B_3&D_3\end{vmatrix}.$	Drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt, wenn $\Delta\neq0$ ist; ist $\Delta=0$ und wenigstens eine Unterdeterminante zweiter Ordnung $\neq0$, so sind die Ebenen einer Geraden parallel; sind alle Unterdeterminanten $=0$, so gehen die Ebenen durch eine Gerade hindurch.
vierer Ebenen	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$ $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.$	Man bestimmt den Schnittpunkt dreier beliebiger Ebenen (s. o.). In diesem Falle ($\delta=0$) ist die vierte Gleichung eine Folge der übrigen drei Gleichungen.	Vier Ebenen gehen nur dann durch einen Punkt, wenn $\delta=\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1&D_1\\A_2&B_2&C_2&D_2\\A_3&B_3&C_3&D_3\\A_4&B_4&C_4&D_4\end{vmatrix}=0$ ist.
einer Ebene und einer Geraden	1. $Ax+By+Cz+D=0,$ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 2. $Ax+By+Cz+D=0,$ $y=kx+a,\ z=hx+b$	1. $\bar{x}=x_1-l\varrho,$ $\bar{y}=y_1-m\varrho,$ $\bar{z}=z_1-n\varrho,$ mit $\varrho=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn};$ 2. $\bar{x}=-\frac{Ba+Cb+D}{A+Bk+Ch},$ $\bar{y}=k\bar{x}+a,\ \bar{z}=h\bar{x}+b.$	Ist $Al+Bm+Cn=0$ $(A+Bk+Ch=0),$ so ist die Gerade der Ebene parallel; ist außerdem $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ $(Ba+Cb+D=0),$ so liegt die Gerade in der Ebene.
zweier Geraden	$y=k_1x+a_1,\ z=h_1x+b_1;$ $y=k_2x+a_2,\ z=h_2x+b_2.$	$\bar{x}=\frac{a_2-a_1}{k_1-k_2}=\frac{b_2-b_1}{h_1-h_2};$ $\bar{y}=\frac{k_1a_2-k_2a_1}{k_1-k_2};$ $\bar{z}=\frac{h_1b_2\ [illegible]}{h_1\ [illegible]}$	Diese Formeln geben einen Schnittpunkt nur unter der Bedingung $(a_1-a_2)(h_1-h_2)$ $=(b_1-b_2)(k_1-k_2);$ im entgegengesetzten Falle schneiden die Geraden einander nicht (vgl. auch S. 191).

Winkel zwischen Ebenen und Geraden

Winkel zwischen	gegeben durch die Gleichungen	werden berechnet nach der Formel
zwei Ebenen	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$
vektoriell	$\mathfrak{r}\mathfrak{N}_1 + D_1 = 0,$ $\mathfrak{r}\mathfrak{N}_2 + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2}{N_1N_2}$
zwei Geraden	$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$ $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$	$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}.$
vektoriell	$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) \times \mathfrak{R}_1 = 0,$ $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2) \times \mathfrak{R}_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2}{R_1R_2}$
einer Geraden und einer Ebene	$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$ $Ax + By + Cz + D = 0$	$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$
vektoriell	$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) \times \mathfrak{R} = 0,$ $\mathfrak{r}\mathfrak{N} + D = 0$	$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}}{RN}$

Parallelitätsbedingung (die Bezeichnungen sind die gleichen wie oben):

für zwei Ebenen: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ oder $\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 = 0;$

für zwei Geraden: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ oder $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 = 0;$

für eine Gerade und eine Ebene: $Al + Bm + Cn = 0$ oder $\mathfrak{R}\mathfrak{N} = 0.$

Orthogonalitätsbedingung (die Bezeichnungen sind die gleichen wie oben):

für zwei Ebenen: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ oder $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 = 0;$

für zwei Geraden: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ oder $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2 = 0;$

für eine Gerade und eine Ebene: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ oder $\mathfrak{R} \times \mathfrak{N} = 0.$

10. Flächen zweiter Ordnung (Gleichungen in Normalform)*

Mittelpunktsflächen. Die nachstehend aufgeführten Gleichungen sind in der *Normalform* angegeben: Der *Mittelpunkt* (d. h. der Punkt, in dem die durch ihn hindurchgehenden Sehnen halbiert werden), befindet sich im Koordinatenursprung; die Koordinatenachsen liegen in den Symmetrieachsen der Fläche. Dabei sind die Koordinatenebenen zugleich Symmetrieebenen.

Das Ellipsoid (Abb. 212):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

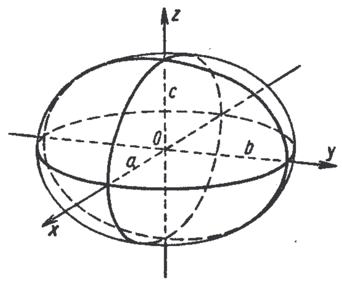


Abb. 212

a, b und c sind dabei die Halbachsen. Ist $a = b > c$, so liegt ein *zusammengedrücktes Rotationsellipsoid* vor, das sich durch Rotation der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ um die kleine Achse ergibt, die in der x,z-Ebene liegt (Abb. 213). Für $a = b < c$ entsteht ein *langgestrecktes Ellipsoid durch Rotation* der in der x,z-Ebene liegenden Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ um die große Achse (Abb. 214). Für $a = b = c$ ergibt sich die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Eine beliebige Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse (im Spezialfalle in einem Kreis). Der Rauminhalt des Ellipsoids ist gleich $\frac{4}{3}\pi abc$.

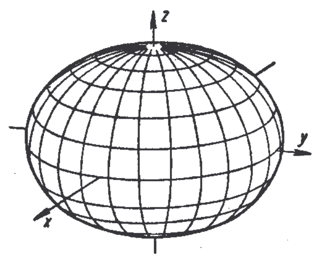


Abb. 213

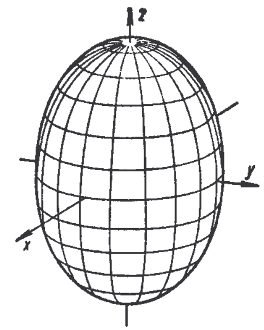


Abb. 214

Das einschalige Hyperboloid (Abb. 215): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, a und b sind die reellen Halbachsen, c ist die imaginäre Halbachse. Über die geradlinigen Erzeugenden s. S. 197.

Das zweischalige Hyperboloid (Abb. 216): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, c ist die reelle Halbachse, a und b sind die imaginären Halbachsen.

* Allgemeine Gleichung der Flächen 2. Ordnung s. S. 198.