Die Formeln für den Übergang von der Kugelkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten und umgekehrt sind

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \Theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \Theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Die Richtung im Raum wird durch einen Einheitsvektor $\mathfrak{r}^0$ (vgl. S. 447) festgelegt, dessen Koordinaten die Kosinus der Winkel (Abb. 200) sind, die von der gegebenen Richtung und den positiven Richtungen der Koordinatenachsen gebildet werden (*Richtungskosinus*):

$$l = \cos \alpha; \quad m = \cos \beta; \quad n = \cos \gamma; \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Der *Winkel* φ zwischen zwei durch ihre Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 und l_2, m_2, n_2 gegebenen Richtungen ergibt sich nach der Formel

$$\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Zwei Richtungen stehen aufeinander senkrecht, wenn $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ ist.

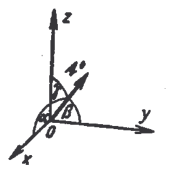

Abb. 200

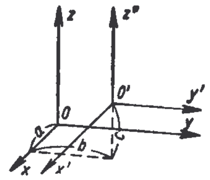

Abb. 201

Transformation rechtwinkliger Koordinaten.
Parallelverschiebung (x, y, z – die ursprünglichen Koordinaten; x', y', z' – die neuen Koordinaten; a, b, c – die Koordinaten des neuen Koordinatenursprungs im ursprünglichen Koordinatensystem; Abb. 201):

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c; \quad x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Drehung der Koordinatenachsen (Abb. 202). Bezeichnet man die Richtungskosinus der neuen Achsen nach dem nachstehend angegebenen Schemas, so gilt

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z',$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z';$$
$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z,$$
$$y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$
$$z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z.$$

In bezug auf die alten Achsen	Richtungskosinus der neuen Achsen		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Die Transformationsdeterminante ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

Die Eigenschaften der Transformationsdeterminante:
1. $\Delta = \pm 1$ (das positive Vorzeichen gilt, wenn die Orientierung des Koordinatensystems erhalten bleibt; bei Änderung der Orientierung gilt das negative Vorzeichen).
2. Die Summe der Quadrate der Elemente einer Zeile oder einer Spalte ist gleich 1.
3. Die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente zweier verschiedener Zeilen oder Spalten verschwindet.
4. Jedes Element ist gleich seiner mit $\Delta = \pm 1$ multiplizierten Adjunkte (vgl. S. 125).

Die Eulerschen Winkel. Die Lage des neuen Koordinatensystems gegenüber dem alten läßt sich vollständig durch drei Winkel bestimmen, die von Euler eingeführt wurden (Abb. 202):
1. Der *Nutationswinkel* ϑ zwischen den positiven Richtungen der z-Achse und der z'-Achse ($0 \leqq \vartheta < \pi$);
2. der *Präzessionswinkel* ψ zwischen der x-Achse und der Schnittgeraden OA der x,y-Ebene und der x',y'-Ebene, auf der die positive Richtung so gewählt ist, daß die z-Achse, die z'-Achse und OA ein Richtungstripel mit derselben Orientierung bilden wie die Koordinatenachsen*; der Winkel ψ wird von der x-Achse aus in Richtung nach der y-Achse gemessen ($0 \leqq \psi < 2\pi$);
3. der *Winkel* φ *der reinen Drehung* zwischen der Geraden OA und der x'-Achse; die Messung erfolgt von der x'-Achse aus in Richtung der y'-Achse ($0 \leqq \varphi < 2\pi$).
Setzt man

$$\cos \vartheta = c_1, \quad \cos \psi = c_2, \quad \cos \varphi = c_3,$$
$$\sin \vartheta = s_1, \quad \sin \psi = s_2, \quad \sin \varphi = s_3,$$

so gilt

$$l_1 = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3,$$
$$m_1 = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3,$$
$$n_1 = s_1 s_3,$$
$$l_2 = -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, \quad l_3 = s_1 s_2,$$
$$m_2 = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, \quad m_3 = -s_1 c_2,$$
$$n_2 = s_1 c_3, \quad n_3 = c_1.$$

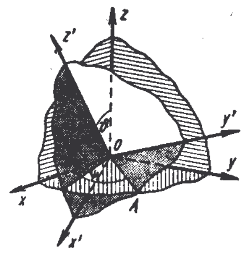

Abb. 202

Der **Abstand von zwei Punkten** $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (Abb. 203) ist $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
Die Richtungskosinus der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ sind

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Teilung einer Strecke im gegebenen Verhältnis (Abb. 203). Die Koordinaten eines Punktes P, für den

$$\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{m}{n} = \lambda$$

gilt, ergeben sich nach den Formeln

$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$
$$y = \frac{n y_1 + m y_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$
$$z = \frac{n z_1 + m z_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

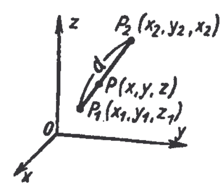

Abb. 203

Für den *Mittelpunkt* der Strecke gelten

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Die Koordinaten des *Schwerpunktes* eines Systems materieller Punkte $M_i(x_i, y_i, z_i)$ mit den Massen m_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) bestimmt man nach den Formeln (summiert wird von $i = 1$ bis $i = n$)

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

* Orientierung eines Richtungstripels s. S. 449.